Mécanique des Milieux Continus

Golay Frédéric - Bonelli Stéphane

01/02/2011
ISITV

Ce cours de mécanique des milieux continus est à la base de l'enseignement de mécanique à l'ISITV. Les notions abordées ici, transport de champs, lois de conservation, ..., seront reprises ultérieurement en mécanique des solides et mécanique des fluides. Dans une première partie, nous aborderons les notations tensorielles et vectorielles indispensables à toute étude scientifique, puis dans une deuxième partie, nous étudierons la cinématique des milieux continus. Après avoir introduit la modélisation des efforts et les lois de conservation par le principe des puissances virtuelles, nous appliquerons ces lois de conservation aux lois de comportement de l'élasticité linéaire (en mécanique des solides) et aux lois de comportement des fluides newtoniens (en mécanique des fluides).

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS TENSORIELLES

1 Vecteurs et tenseurs

Avertissement: L'objectif de ce chapitre, est de familiariser les étudiants avec les notations tensorielles. Afin d'en simplifier le contenu, nous ne considérerons que des bases orthonormées.

1.1 Notations

1.1.1 Vecteur

Dans un espace euclidien ξ à trois dimensions, soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ une base orthonormée. Un vecteur $\vec{V}$ est représenté par ses composantes V_1, V_2, V_3

$$\vec{V} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} V_i\vec{e}_i \tag{1.1}$$

En utilisant la *convention de sommation*, ou *convention d'Einstein*, on écrit

$$\vec{V} = V_i\vec{e}_i \tag{1.2}$$

où, chaque fois qu'un indice est répété, il convient de faire varier cet indice de 1 à 3 et de faire la somme. Dans l'expression (2) l'indice i est un "indice muet".

En notation matricielle on écrira parfois

$$\vec{V} = \left\{\vec{V}\right\} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} \tag{1.3}$$

et le vecteur transposé

$$\vec{V}^T = \left\{\vec{V}\right\}^T = \left\langle \vec{V} \right\rangle = \left\langle V_1\ V_2\ V_3 \right\rangle \tag{1.4}$$

1.1.2 Application linéaire de ξ dans ξ

Soit A une application linéaire, dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Cette application est représentée par une matrice 3x3 notée $[A]$:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Si $\vec{W}$ est un vecteur tel que $\vec{W} = A\vec{V}$, alors les composantes de $\vec{W}$ sont données par

$$\begin{aligned} W_1 &= A_{11}V_1 + A_{12}V_2 + A_{13}V_3 \\ W_2 &= A_{21}V_1 + A_{22}V_2 + A_{23}V_3 \\ W_3 &= A_{31}V_1 + A_{32}V_2 + A_{33}V_3 \end{aligned}$$

et en utilisant les conventions de sommation où j est un indice muet

$$W_i = A_{ij}V_j \tag{1.5}$$

et en notation vectorielle

$$\{W\} = [A]\{V\}$$

On définit les symboles de Kronecker par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases} \tag{1.6}$$

En particulier l'application identité $\overset{=}{1}$ est représentée par la matrice

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La composition de deux applications linéaires se traduit par le produit de leur matrice représentative, c'est-à-dire

$$C = A \circ B \quad ou\ encore \quad [C] = [A][B]$$

et en notation indicielle

$$C_{ij} = A_{ik}B_{kj} \tag{1.7}$$

1.1.3 Formes bilinéaires

Soit A une forme bilinéaire sur ξ, c'est-à-dire une application bilinéaire de $\xi \times \xi$ dans $\mathbb{R}$. Dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ elle est représentée par une matrice A_{ij} telle que

$$A\left(\vec{V}, \vec{W}\right) = A_{ij}V_iW_j \tag{1.8}$$

ou en notation matricielle

$$A\left(\vec{V}, \vec{W}\right) = \langle V \rangle [A] \{W\}$$

En particulier, la forme bilinéaire représentée dans toute base par les symboles de Kronecker est le produit scalaire. Si ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) est une base orthonormée, alors

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

et le produit scalaire de deux vecteurs est donné par

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = V_i\vec{e}_i \cdot W_j\vec{e}_j = V_iW_j\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}V_iW_j = V_iW_i$$

ou en notation matricielle

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \langle V \rangle \{W\}$$

1.1.4 Tenseurs

1.1.4.1 Tenseur du second ordre

Un tenseur du second ordre T est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur $\vec{V}$ de l'espace euclidien un vecteur $\vec{W}$ de ce même espace.

$$\overrightarrow{W} = T\left(\overrightarrow{V}\right)$$

Cet opérateur peut être représenté par une matrice 3x3, notée $\left[T\right]$ ou $\left[\overline{\overline{T}}\right]$ ou $\overline{\overline{T}}$, telle que

$$W_i = T_{ij} V_j$$

ou en notation matricielle

$$\left\{\overrightarrow{W}\right\} = \left[\overline{\overline{T}}\right]\left\{\overrightarrow{V}\right\}$$

ou

$$\overrightarrow{W} = \overline{\overline{T}}\,\overrightarrow{V}$$

* Un tenseur est dit **symétrique** si $T_{ij} = T_{ji}$

* Un tenseur est dit **antisymétrique** si $T_{ij} = -T_{ji}$

* Un tenseur est dit **isotrope** si $T_{ij} = t\,\delta_{ij}$

* On peut toujours décomposer un tenseur en une partie symétrique et antisymétrique

$$\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}}^S + \overline{\overline{T}}^A \quad \text{ou} \quad T_{ij} = T_{ij}^S + T_{ij}^A$$

avec $T_{ij}^S = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right)$ et $T_{ij}^A = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)$

1.1.4.2 Tenseur d'ordre supérieur

On peut définir un vecteur $\overrightarrow{V}$ par ses composantes V_i, ou par les coefficients de la forme linéaire $\overrightarrow{X} \rightarrow \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{V} = X_i V_i$, **car la base choisie est orthonormée** (voir les notions de vecteurs covariants et contravariants).

On peut alors considérer le vecteur comme un tenseur du premier ordre.

De même, une fonction scalaire peut être considérée comme un tenseur d'ordre zéro.

Un tenseur du troisième ordre $\overline{\overline{\overline{S}}}$ est un opérateur linéaire qui, à tout vecteur $\overrightarrow{Z}$ fait correspondre un tenseur du second ordre $\overline{\overline{T}}$.

$$\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{\overline{S}}}(\overrightarrow{Z}) \quad \textit{ou encore} \quad T_{ij} = S_{ijk} Z_k$$

1.1.4.3 Produit tensoriel

On définit le produit tensoriel du vecteur $\overrightarrow{U}$ par le vecteur $\overrightarrow{V}$, noté $\overrightarrow{U} \otimes \overrightarrow{V}$, comme le tenseur d'ordre deux, défini par la forme bilinéaire qui aux vecteurs $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y}$ fait correspondre $\left(\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{X}\right)\left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{Y}\right)$

Les 9 produits tensoriels $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ définissent une base de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre deux, si bien que l'on peut écrire un tenseur T comme

$$\overline{\overline{T}} = T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

ou encore, par exemple,

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = u_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

1.1.4.4 Contraction et produit contracté

Soit le produit tensoriel $\vec{A} \otimes \vec{B} \otimes \vec{C}$, on appelle **contraction**, l'opération qui lui fait correspondre le vecteur $\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$. Le **produit contracté** d'un tenseur d'ordre 4 $\overset{\equiv\equiv}{R}$ et d'un tenseur d'ordre 3 $\overset{\equiv}{S}$ est défini par le tenseur d'ordre 5

$$\overset{\equiv\equiv}{R} \cdot \overset{\equiv}{S} = \left(R_{ijkl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \right) \cdot \left(S_{pqr} \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \otimes \vec{e}_r \right) = R_{ijkm} S_{mqr} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_q \otimes \vec{e}_r$$

Le **produit doublement contracté** d'un tenseur d'ordre 4 $\overset{\equiv\equiv}{R}$ et d'un tenseur d'ordre 3 $\overset{\equiv}{S}$ est défini par le tenseur d'ordre 3

$$\overset{\equiv\equiv}{R} : \overset{\equiv}{S} = \left(R_{ijkl} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l \right) : \left(S_{pqr} \vec{e}_p \otimes \vec{e}_q \otimes \vec{e}_r \right) = R_{ijnm} S_{mnr} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_r$$

Par exemple, le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2 $\overline{\overline{T}}$ et $\overline{\overline{T'}}$ est le scalaire

$$\overline{\overline{T}} : \overline{\overline{T'}} = \left(T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \right) : \left(T'_{pq} \vec{e}_p \otimes \vec{e}_a \right) = T_{ij} T'_{ji}$$

1.2 Changement de repère

1.2.1 Matrice de passage

Soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ une base orthonormée et $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ une autre base orthonormée.

On définit la matrice de passage Q telle que:

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= Q_{11} \vec{e}_1 + Q_{12} \vec{e}_2 + Q_{13} \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= Q_{21} \vec{e}_1 + Q_{22} \vec{e}_2 + Q_{23} \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= Q_{31} \vec{e}_1 + Q_{32} \vec{e}_2 + Q_{33} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

ou encore, en notations indicielles

$$\vec{e}'_i = Q_{ij} \vec{e}_j$$

et en notation matricielle

$$\{\vec{e}'\} = [Q] \{\vec{e}\}$$

Les deux bases étant orthonormées, on doit avoir

$$\delta_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = Q_{ik} \vec{e}_k \cdot Q_{jl} \vec{e}_l = Q_{ik} Q_{jl} \delta_{kl} = Q_{ik} Q_{jk}$$

ce qui montre que la matrice inverse de Q est Q^T. En particulier on tire la relation inverse:

$$\vec{e}_i = Q_{ji} \vec{e}'_j$$

1.2.2 Vecteurs

Soit $\vec{V}$ un vecteur de composantes V_i dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et V'_i dans la base $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i = V'_i \vec{e}'_i$$

En utilisant la matrice de passage

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i = V_i Q_{ki} \vec{e}_k$$

soit

$$V'_k = V_i Q_{ki} \qquad et \qquad V_k = V'_i Q_{ik}$$

ou encore, en notation matricielle

$$\left\{\overrightarrow{V'}\right\} = [Q]\left\{\vec{V}\right\} \qquad et \qquad \left\{\vec{V}\right\} = [Q]^T\left\{\overrightarrow{V'}\right\}$$

Remarque: le produit scalaire est un invariant, c'est à dire que cette fonction est indépendante du repère choisi.

En notation indicielle

$$\overrightarrow{V'}.\overrightarrow{W'} = V'_k W'_k = V_i Q_{ki} W_j Q_{kj} = \delta_{ij} V_i W_j = V_i W_i = \vec{V}.\vec{W}$$

et en notation matricielle

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V'}.\overrightarrow{W'} &= \left\langle\overrightarrow{V'}\right\rangle\left\{\overrightarrow{W'}\right\} = \left([Q]\left\{\vec{V}\right\}\right)^T [Q]\left\{\vec{W}\right\} \\ &= \left\langle\vec{V}\right\rangle[Q]^T[Q]\left\{\vec{W}\right\} = \left\langle\vec{V}\right\rangle\left\{\vec{W}\right\} = \vec{V}.\vec{W}\end{aligned}$$

1.2.3 Application linéaire

Soit A une application linéaire, de composantes A_{ij} dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. et A'_{ij} dans la base $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

En notation indicielle

$$W'_i = A'_{ik} V'_k = Q_{ij} W_j = Q_{ij} A_{jm} V_m = Q_{ij} A_{jm} Q_{km} V'_k$$

d'où

$$A'_{ik} = Q_{ij} A_{jm} Q_{km}$$

et en notation matricielle

$$\left\{\overrightarrow{W'}\right\} = [A']\left\{\overrightarrow{V'}\right\} = [Q]\left\{\vec{W}\right\} = [Q][A]\left\{\vec{V}\right\} = [Q][A][Q]^T\left\{\vec{V}\right\}$$

soit

$$[A'] = [Q][A][Q]^T$$

1.2.4 Forme bilinéaire

Soit A une application linéaire, de composantes A_{ij} dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. et A'_{ij} dans la base $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

$$A(\vec{V},\vec{W}) = A_{ij} V_i W_j = A'_{ij} V'_i W'_j = A_{ij} Q_{ki} V'_k Q_{mj} W'_m$$

soit

$$A'_{km} = A_{ij} Q_{ki} Q_{mj}$$

et en notation matricielle

$$\begin{aligned}&A(\vec{V},\vec{W}) = \left\langle\vec{V}\right\rangle[A]\left\{\vec{W}\right\} = \left\langle\overrightarrow{V'}\right\rangle[A']\left\{\overrightarrow{W'}\right\} = \\ &\left([Q]^T\left\{\overrightarrow{V'}\right\}\right)^T[A][Q]^T\left\{\overrightarrow{W'}\right\} = \left\langle\overrightarrow{V'}\right\rangle[Q][A][Q]^T\left\{\overrightarrow{W'}\right\}\end{aligned}$$

soit

$$[A'] = [Q][A][Q]^T$$

1.2.5 Tenseur d'ordre 2

Soit $\overline{\overline{T}}$ un tenseur d'ordre 2, en notation indicielle

$$\overline{\overline{T}} = T_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T'_{ij}\vec{e}'_i \otimes \vec{e}'_j = T_{ij}Q_{ki}\vec{e}'_k \otimes Q_{mj}\vec{e}'_m = T_{ij}Q_{ki}Q_{mj}\vec{e}'_k \otimes \vec{e}'_m$$

puis

$$T'_{km} = T_{ij}Q_{ki}Q_{mj}$$

2 Permutations et déterminants

2.1 Les symboles de permutation

On introduit les symboles de permutation

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & si\ i,j,k\ est\ une\ permutation\ paire\ de\ 1,2,3 \\ -1 & si\ i,j,k\ est\ une\ permutation\ impaire\ de\ 1,2,3 \\ 0 & si\ deux\ indices\ sont\ répétés \end{cases}$$

Ces symboles représentent le produit mixte des vecteurs de base

$$\varepsilon_{ijk} = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\right)$$

ε_{ijk} sont les composantes d'un tenseur du troisième ordre, qui représente, par exemple, la forme trilinéaire produit mixte:

$$\left(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\right) = \varepsilon_{ijk}\, U_i V_j W_k$$

Avec un peu de patience on peut démontrer les résultats suivants

$$\begin{cases} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = Det\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{km} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \end{cases}$$

2.2 Déterminant d'une matrice

Les symboles de permutation permettent le calcul du déterminant d'une matrice par

$$\varepsilon_{ijk}Det(A) = \varepsilon_{mnp}A_{im}A_{jn}A_{kp} \tag{1.9}$$

ou encore

$$Det(A) = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}A_{im}A_{jn}A_{kp}$$

On peut également déterminer l'inverse d'une matrice

$$B = A^{-1} \qquad et \quad B_{ji} = \frac{1}{2Det(A)}\varepsilon_{imn}\varepsilon_{jpq}A_{mp}A_{nq}$$

2.3 Polynôme caractéristique

Les valeurs propres d'un tenseur du second ordre sont obtenues par la résolution de l'équation caractéristique

$$P(\lambda) = Det(A - \lambda I)$$

soit en développant

$$\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}(A_{im} - \lambda\delta_{im})(A_{jn} - \lambda\delta_{jn})(A_{kp} - \lambda\delta_{kp}) = 0$$

ou encore

$$P(\lambda) = I_3 - \lambda I_2 + \lambda^2 I_1 - \lambda^3$$

avec

$$\begin{cases} I_3 = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}A_{im}A_{jn}A_{kp} = Det(A) \\ I_2 = \frac{1}{2}\left(A_{ii}A_{jj} - A_{ij}A_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left((Tr\ A)^2 - Tr\ A^2\right) \\ I_1 = A_{ii} = Tr\ A \end{cases}$$

I_1, I_2, I_3 sont appelés les invariants fondamentaux du tenseur A.

2.4 Adjoint d'un tenseur antisymétrique

Soit Ω un tenseur antisymétrique

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

on peut également lui associer le vecteur

$$\vec{\omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_{23} \\ \Omega_{31} \\ \Omega_{12} \end{Bmatrix}$$

soit

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\vec{\omega}$ est le vecteur adjoint du tenseur antisymétrique Ω. En notation indicielle on a:

$$\begin{cases} \Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega_k \\ \omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{jk} \end{cases} \qquad (1.10)$$

3 Calcul vectoriel et analyse vectorielle

3.1 Calcul vectoriel

Le produit vectoriel

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

s'écrit en notation indicielle

$$c_i \vec{e}_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

On peut montrer que

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\vec{a}$$

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \wedge \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

3.2 Analyse vectorielle

On note d'une virgule la dérivée partielle, soit $,i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Les opérateurs exposés dans cette partie seront exprimés dans un repère cartésien orthonormé.

*** Soit f une fonction scalaire**

Le gradient d'une fonction scalaire est un vecteur

$$\overrightarrow{grad}\ f = \nabla f = f_{,i}\ \vec{e}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

Le laplacien d'une fonction scalaire est un scalaire

$$\Delta\ f = f_{,ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

*** Soit $\vec{v}$ un vecteur**

La divergence d'un vecteur est un scalaire

$$Div\ \vec{v} = v_{i,i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Le rotationnel d'un vecteur est un vecteur

$$\vec{rot}\ \vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}\ \vec{e}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{Bmatrix}$$

Le gradient d'un vecteur est une matrice

$$\nabla \vec{v} = v_{i,j}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Le laplacien d'un vecteur est un vecteur

$$\Delta \vec{v} = v_{i,jj}\, \vec{e}_i = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \\ \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{Bmatrix}$$

*** Soit $\overline{\overline{T}}$ un tenseur du second ordre**

La divergence d'un tenseur est un vecteur

$$Div\, \overline{\overline{T}} = T_{ij,j}\, \vec{e}_i = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{Bmatrix}$$

*** Quelques formules utiles**

$$Div\left(f\, \vec{a}\right) = f\, Div\, \vec{a} + \vec{a} \cdot \overrightarrow{grad}\, f$$
$$Div\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot \vec{rot}\, \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{rot}\, \vec{b}$$
$$Div\left(\vec{rot}\, \vec{a}\right) = 0$$
$$\vec{rot}\left(\overrightarrow{grad}\, f\right) = 0$$
$$\overrightarrow{grad}\left(f\, g\right) = f\, \overrightarrow{grad}\, g + g\, \overrightarrow{grad}\, f$$
$$\vec{rot}\left(f\, \vec{a}\right) = f\, \vec{rot}\, \vec{a} + \overrightarrow{grad}\, f \wedge \vec{a}$$
$$Div\left(\overrightarrow{grad}\, f\right) = \Delta f$$
$$\vec{rot}\left(\vec{rot}\, \vec{a}\right) = \overrightarrow{grad}\left(Div\, \vec{a}\right) - \Delta \vec{a}$$

3.3 Transformation d'intégrales

Soit Ω un domaine borné et $\partial\Omega$ sa frontière, de normale $\vec{n}$.

Soit ϕ une fonction scalaire, alors

$$\iint_{\partial\Omega} \phi\, \vec{n}\, dS = \iiint_{\Omega} \overrightarrow{grad}\, \phi\, dV$$

Soit $\vec{A}$ un vecteur, alors

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_{\Omega} Div(\vec{A})\, dV$$

Soit $\overline{\overline{T}}$ un tenseur, alors

$$\iint_{\partial\Omega} \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_{\Omega} Div(\overline{\overline{T}})\, dV$$

Soit $\partial\Omega$ un domaine plan de normale $\vec{n}$, de frontière Γ. Soit $\vec{U}$ un vecteur défini sur ce domaine. Si $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à Γ, alors

$$\iint_{\partial\Omega} \overrightarrow{rot}(\vec{U}) \cdot \vec{n}\, dS = \int_{\Gamma} \vec{U} \cdot \vec{\tau}\, dl$$

Tous ces résultats sont issus du théorème de la divergence

$$\iint_{\partial\Omega} t_{jkl} n_l\, dS = \iiint_{\Omega} t_{jkl,l}\, dV$$

4 Formules essentielles en Mécanique des Milieux Continus

4.1 Coordonnées cartésiennes orthonormées

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

* Soit $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$ un vecteur, alors

$$\nabla(\vec{v}) = \overline{\overline{\nabla v}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = v_{i,j}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

et

$$div\vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i} = Tr\left(\overrightarrow{grad}(\vec{v})\right) = \nabla\vec{v} : \overline{\overline{I}} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\Delta\vec{v} = div\left(\nabla(\vec{v})\right) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}\vec{e}_i = v_{i,jj}\,\vec{e}_i = \Delta v_x\vec{e}_x + \Delta v_y\vec{e}_y + \Delta v_z\vec{e}_z$$

* Soit f une fonction scalaire, alors

$$\overrightarrow{grad}(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_i = f_{,i}\,\vec{e}_i = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

et

$$\Delta f = div\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} = f_{,jj} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

* Soit $\overline{\overline{T}} = T_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}$ un tenseur symétrique du deuxième ordre, alors:

$$\mathrm{div}(\overline{\overline{T}}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\,\vec{e}_i = T_{ij,j}\,\vec{e}_i = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{xz}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{yz}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

et

$$\Delta\overline{\overline{T}} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = T_{ij,kk}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \Delta T_{xx} & \Delta T_{xy} & \Delta T_{xz} \\ \Delta T_{yx} & \Delta T_{yy} & \Delta T_{yz} \\ \Delta T_{zx} & \Delta T_{zy} & \Delta T_{zz} \end{bmatrix}$$

4.2 Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \quad et \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \ , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \ , \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

$$d(\overrightarrow{OM}) = \vec{e}_r dr + r d\theta \vec{e}_\theta + \vec{e}_z dz$$

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0 \ , & \dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0 \ , & \dfrac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \ , & \dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \ , & \dfrac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} = 0 \ , & \dfrac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} = 0 \ , & \dfrac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} = 0 \end{array}$$

* Soit $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z$ un vecteur, alors

$$\overrightarrow{grad}(\vec{v}) = \overline{\overline{\nabla v}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \dfrac{\partial v_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

et

$$div\,\vec{v} = Tr\left(\nabla(\vec{v})\right) = \nabla\vec{v} : \overline{\overline{I}} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\Delta\vec{v} = div\left(\nabla\vec{v}\right) = \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2}\right)\vec{e}_r + \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)\vec{e}_\theta + \Delta v_z\vec{e}_z$$

* Soit f une fonction scalaire, alors

$$\overrightarrow{grad}(f) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

et

$$\Delta f = div\left(\nabla f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

* Soit $\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta z} \\ T_{zr} & T_{z\theta} & T_{zz} \end{bmatrix}$ un tenseur symétrique du deuxième ordre, alors:

$$div(\overline{\overline{T}}) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \end{Bmatrix}$$

4.3 Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \quad et \quad \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r \ , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \ , \quad \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \phi} = \vec{e}_\phi$$

$$d(\overrightarrow{OM}) = \vec{e}_r dr + rd\theta\vec{e}_\theta + rsin\theta \ d\phi \ \vec{e}_\phi$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r} = 0$$
$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} = sin\theta\vec{e}_\phi \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi} = cos\theta\vec{e}_\phi \quad , \quad \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = sin\theta\vec{e}_r - cos\theta\vec{e}_\theta$$

Soit $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_\phi\vec{e}_\phi$ un vecteur, alors

$$\overrightarrow{grad}(\vec{v}) = \overline{\overline{\nabla v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) & \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi\right) \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) & \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - cotg\theta v_\phi\right) \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} & \frac{1}{r}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + cotg\theta v_\theta + v_r\right) \end{bmatrix}$$

et

$$div\vec{v} = \nabla\vec{v} : \overline{\overline{I}} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2\frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \cot g\theta\frac{v_\theta}{r}$$

$$\Delta\vec{v} = div\left(\nabla(\vec{v})\right) = \begin{Bmatrix} \Delta v_r - \frac{2}{r^2}\left(v_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) \\ \Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}\right) \\ \Delta v_\phi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + cotg\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{2\sin\theta}\right) \end{Bmatrix}$$

* Soit f une fonction scalaire, alors

$$\overrightarrow{grad}(f) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \phi} \end{Bmatrix}$$

et

$$\Delta f = div\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} cotg\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

* Soit $\overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} T_{rr} & T_{r\theta} & T_{r\phi} \\ T_{\theta r} & T_{\theta\theta} & T_{\theta\phi} \\ T_{\phi r} & T_{\phi\theta} & T_{\phi\phi} \end{bmatrix}$ un tenseur symétrique du deuxième ordre, alors:

$$div(\overline{\overline{T}}) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} + \dfrac{1}{r}\left(2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi} + T_{r\theta}\cot g\theta\right) \\ \dfrac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \dfrac{1}{r}\left((T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi})cotg\theta + 3T_{r\theta}\right) \\ \dfrac{\partial T_{\phi r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \dfrac{1}{r}\left(2T_{\theta\phi}cotg\theta + 3T_{r\phi}\right) \end{Bmatrix}$$

4.4 Comment retrouver les formules

Nous nous plaçons par exemple en coordonnées cylindriques. On note

$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_z\vec{e}_z = v_i\vec{e}_i$ avec $i = r, \theta, z$ et $,i = \dfrac{\partial}{\partial r}, \ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}, \ \dfrac{\partial}{\partial z}$

Donc, avec cette convention

$$\vec{e}_{r,\theta} = \frac{\vec{e}_\theta}{r} \quad et \quad \vec{e}_{\theta,\theta} = -\frac{\vec{e}_r}{r}$$

Chercher le gradient d'un tenseur consiste à augmenter l'ordre de ce tenseur, soit

$$\nabla(**) = (**)_{,j} \otimes \vec{e}_j$$

Si on applique cette remarque à un vecteur, on obtient:

$$\nabla(\vec{v}) = (v_i\vec{e}_i)_{,j} \otimes \vec{e}_j$$

En n'oubliant pas de dériver les vecteurs de base, car nous sommes dans un système de coordonnées cylindrique,

$$\begin{aligned} \nabla\vec{v} &= v_{i,j}\ \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + v_i\ \vec{e}_{i,j} \otimes \vec{e}_j = v_{i,j}\ \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + v_i\ \vec{e}_{i,\theta} \otimes \vec{e}_\theta \\ &= v_{i,j}\ \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + v_r\ \vec{e}_{r,\theta} \otimes \vec{e}_\theta + v_\theta\ \vec{e}_{\theta,\theta} \otimes \vec{e}_\theta \\ &= v_{i,j}\ \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + \frac{v_r}{r}\ \vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta - \frac{v_\theta}{r}\ \vec{e}_r \otimes \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Pour obtenir l'opérateur divergence, il suffit de contracter doublement avec le tenseur unité d'ordre 2,

$$div(**) = \nabla(**) : \overline{\overline{1}}$$

soit dans le cas d'un vecteur:

$$div(\vec{v}) = \nabla(\vec{v}) : \bar{\bar{1}} = v_{i,i} + \frac{v_r}{r} = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

et donc l'opérateur Laplacien pour un scalaire

$$\Delta\varphi = div\left(\nabla\varphi\right) = \varphi_{,ii} + \frac{\varphi_{,r}}{r} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Appliquons maintenant cette méthodologie à un tenseur d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\nabla(\bar{\bar{T}}) &= \left(T_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\right)_{,k} \otimes \vec{e}_k \\
&= T_{ij,k}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k + T_{ij}\,\vec{e}_{i,k} \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k + T_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_{j,k} \otimes \vec{e}_k \\
&= T_{ij,k}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k + T_{ij}\,\vec{e}_{i,\theta} \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_\theta + T_{ij}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_{j,\theta} \otimes \vec{e}_\theta \\
&= T_{ij,k}\,\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k + \frac{T_{rj}}{r}\vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_\theta - \frac{T_{\theta j}}{r}\vec{e}_r \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_\theta \\
&+ \frac{T_{ir}}{r}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_\theta \otimes \vec{e}_\theta - \frac{T_{i\theta}}{r}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_r \otimes \vec{e}_\theta
\end{aligned}$$

Pour obtenir la trace de ce tenseur d'ordre 3 on contracte les deux derniers indices:

$$\begin{aligned}
div\left(\bar{\bar{T}}\right) = \nabla(\bar{\bar{T}}) : \bar{\bar{1}} &= T_{ij,j}\,\vec{e}_i + \frac{T_{r\theta}}{r}\vec{e}_\theta - \frac{T_{\theta\theta}}{r}\vec{e}_r + \frac{T_{ir}}{r}\vec{e}_i \\
&= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} + \frac{T_{rr}}{r}\right)\vec{e}_r \\
&+ \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{T_{r\theta}}{r} + \frac{T_{\theta r}}{r}\right)\vec{e}_\theta \\
&+ \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{z\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r}\right)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

On peut donc maintenant retrouver l'opérateur Laplacien d'un vecteur :

$$\Delta\vec{v} = div\left(\nabla\vec{v}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= v_{i,jj}\vec{e}_i + \frac{v_{r,\theta}}{r}\,\vec{e}_\theta - \frac{v_{\theta,\theta}}{r}\,\vec{e}_r + \frac{v_{r,\theta} - \frac{v_\theta}{r}}{r}\,\vec{e}_\theta - \frac{v_{\theta,\theta} + \frac{v_r}{r}}{r}\,\vec{e}_r + \frac{v_{i,r}}{r}\,\vec{e}_i \\
&= \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{v_r}{r^2}\right)\vec{e}_r + \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)\vec{e}_\theta + \Delta v_z\vec{e}_z
\end{aligned}$$

5 A retenir

Convention de sommation :

$$\vec{V} = V_i \vec{e}_i$$

Produits tensoriels :

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = u_i v_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix}$$

Symboles de permutation :

$$\varepsilon_{ijk} = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k\right) = \begin{cases} +1 & si\ i, j, k\ est\ une\ permutation\ paire\ de\ 1, 2, 3 \\ -1 & si\ i, j, k\ est\ une\ permutation\ impaire\ de\ 1, 2, 3 \\ 0 & si\ deux\ indices\ sont\ répétés \end{cases}$$

Produit vectoriel :

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i$$

Quelques opérateurs :

$$Div\ \vec{v} = v_{i,i}\ , \quad \vec{rot}\ \vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}\ \vec{e}_i\ , \quad \nabla\ \vec{v} = v_{i,j}\ \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j\ , \quad Div\ \overline{\overline{T}} = T_{ij,j}\ \vec{e}_i$$

En systèmes de coordonnées cylindrique ou sphérique, mieux vaut utiliser un formulaire !

CINEMATIQUE

1 Le mouvement et ses représentations

1.1 Configuration

L'espace physique est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. L'ensemble des particules ou points matériels constituant le milieu continu étudié, occupe à chaque instant t, un ensemble de positions dans l'espace: c'est la **configuration** du système à l'instant t, noté $\overline{\Omega}(t)$ (d'intérieur $\Omega(t)$ et de frontière $\partial\Omega(t)$).

On introduit aussi la notion de **configuration de référence**: c'est la configuration particulière du système à un instant t_0 fixé. Souvent on prendra $\overline{\Omega}_0 = \overline{\Omega}(0)$, et on parlera alors de **configuration initiale**.

Toute particule M_0 de $\overline{\Omega}_0$ est repérée par son vecteur position $\vec{X}(t)$ dans la configuration de référence. Toute particule M de $\overline{\Omega}(t)$ est repérée par son vecteur position $\vec{x}(t)$ dans la configuration actuelle (à l'instant t).

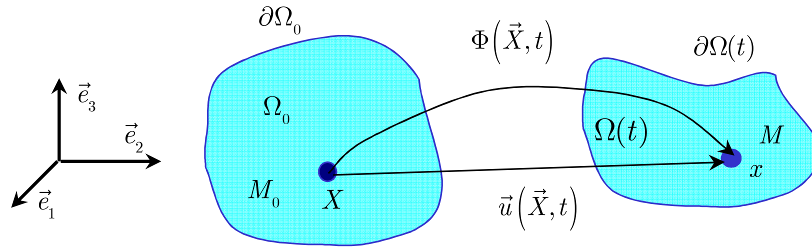


Figure 1 : Configurations de référence et actuelle

La position de chaque particule M sera donc déterminée si on connaît sa position dans la configuration de référence et une fonction Φ telle que:

$$\vec{x}(t) = \Phi\left(\vec{X}, t\right) \tag{2.1}$$

Φ définit le mouvement par rapport à $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On devra donc déterminer trois fonctions scalaires, telles que:

$$\begin{cases} x_1 = \Phi_1(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_2 = \Phi_2(X_1, X_2, X_3, t) \\ x_3 = \Phi_3(X_1, X_2, X_3, t) \end{cases} \tag{2.2}$$

Dire que le milieu est continu, c'est dire que Φ est une fonction continue et biunivoque de X. On supposera que Φ est différentiable. Le déplacement par rapport à la configuration $\overline{\Omega}_0$, à l'instant t, de la particule M_0 est le vecteur

$$\vec{u}(X, t) = \vec{x}(X, t) - \vec{X} \tag{2.3}$$

1.2 Variables de Lagrange et variables d'Euler

Une grandeur attachée à une particule (masse volumique, vitesse,...) peut être définie,

- Soit en fonction de $\vec{X}$ et t : **variables de *Lagrange***

- Soit en fonction de $\vec{x}$ et t : **variables d'*Euler***

Le vecteur vitesse d'une particule M est défini par

$$\vec{V}(\vec{X},t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\partial \Phi(\vec{X},t)}{\partial t} \tag{2.4}$$

Le vecteur accélération d'une particule M est défini par

$$\vec{\Gamma}(\vec{X},t) = \frac{d\vec{V}(\vec{X},t)}{dt} = \frac{\partial^2 \Phi(\vec{X},t)}{\partial t^2} \tag{2.5}$$

1.2.1 Trajectoire

On appelle trajectoire d'une particule, la courbe géométrique lieu des positions occupées par cette particule au cours du temps. $\vec{x}(t) = \Phi\left(\vec{X},t\right)$ est une représentation paramétrée en temps de la trajectoire. Par définition de la vitesse,

$$\vec{V}(\vec{x},t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dx_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dx_3}{dt}\vec{e}_3$$

les trajectoires peuvent être obtenues par la résolution des trois équations

$$\frac{dx_1}{V_1(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_2}{V_2(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_3}{V_3(x_1,x_2,x_3,t)} = dt \tag{2.6}$$

1.2.2 Lignes de courant

A un instant donné, on appelle lignes de courant du mouvement, les lignes qui sont en tout point tangentes au vecteur vitesse de la particule située en ce point. Soit pour ***t* fixé**, deux équations:

$$\frac{dx_1}{V_1(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_2}{V_2(x_1,x_2,x_3,t)} = \frac{dx_3}{V_3(x_1,x_2,x_3,t)} \tag{2.7}$$

Remarque: Pour un mouvement stationnaire (ou permanent) $\vec{V}(\vec{x},t) = \vec{V}(\vec{x})$. **Les lignes de courant et les trajectoires sont confondues**.

1.3 Dérivées particulaires

1.3.1 Définition

Lorsque l'on suit une particule dans son mouvement, la grandeur A attachée à la particule ne dépend que de t. Par définition, on appelle ***dérivée particulaire*** de A à l'instant t, la dérivée de A par rapport à la seule variable t.

En variables de Lagrange: $A = A(\vec{X},t)$

$$\frac{dA}{dt}(\vec{X},t) = \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{X},t) \tag{2.8}$$

En variables d'Euler: $A = A(\vec{x},t)$

$$dA(\vec{x},t) = \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{x},t)dt + \frac{\partial A}{\partial x_j}(\vec{x},t)dx_j$$

$$\frac{dA}{dt}(\vec{x},t) = \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{x},t) + \frac{\partial A}{\partial x_j}(\vec{x},t)\frac{dx_j}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt}(\vec{x},t) = \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{x},t) + \frac{\partial A}{\partial x_j}(\vec{x},t)V_j$$

ou encore

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)A \qquad (2.9)$$

1.3.2 Application à l'accélération

$$\vec{\Gamma}(\vec{x},t) = \frac{d\vec{V}(\vec{x},t)}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\vec{V} \qquad (2.10)$$

que l'on peut également écrire

$$\vec{\Gamma}(\vec{x},t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\vec{V}^2 + \vec{rot}\,\vec{V} \wedge \vec{V}$$

2 Déformation d'un milieux continu

2.1 Notion de déformation

On dira qu'un milieu continu en mouvement subit des déformations si les distances relatives des points matériels varient au cours du temps.

En différenciant (2.1), on obtient:

$$d\vec{x}(t) = \nabla\Phi\, d\vec{X} \qquad dx_i\vec{e}_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j}dX_j\vec{e}_i$$

On note $\overline{\overline{F}}$ l'application linéaire qui fait passer de l'espace vectoriel dans lequel peut varier $d\vec{X}$ dans l'espace vectoriel où varie a priori $d\vec{x}$. Cette application linéaire, appelée **tenseur gradient** ou **application linéaire tangente**, permet donc le passage de la configuration $\overline{\Omega}_0$ à la configuration $\overline{\Omega}(t)$.

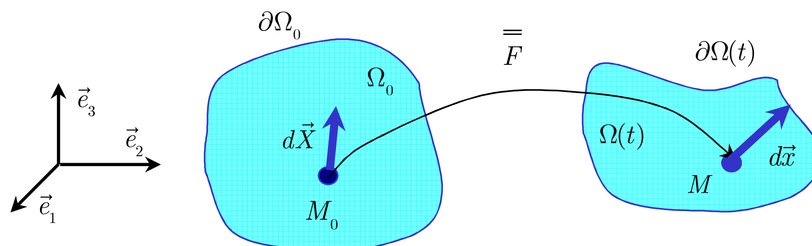


Figure 2 : Application linéaire tangente

En notation indicielle,

$$F_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad soit \quad \overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \qquad (2.11)$$

2.2 Tenseur des déformations

2.2.1 Définition

Le tenseur gradient décrit la transformation locale au voisinage d'une particule donnée. Afin de rendre compte des déformations, c'est à dire des changements de forme autour de cette particule, on s'intéresse à l'évolution du produit scalaire de deux vecteurs matériels pris respectivement dans les deux configurations $\overline{\Omega}_0$ et $\overline{\Omega}(t)$.

Considérons trois particules voisines $\vec{X}$, $\vec{X}+d\vec{X}$, $\vec{X}+d\vec{X}'$. Après déformations, elles occupent dans $\overline{\Omega}(t)$ les positions respectives $\vec{x}$, $\vec{x}+d\vec{x}$, $\vec{x}+d\vec{x}'$.

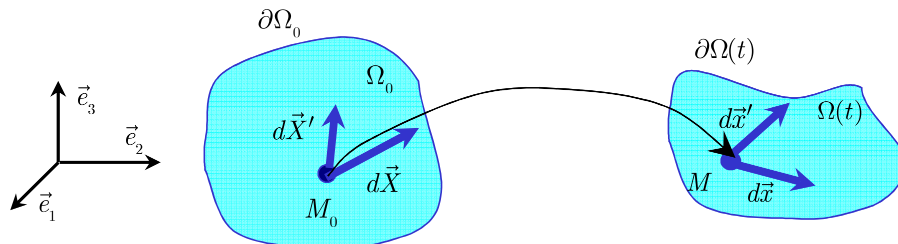


Figure 3 : Notion de déformation

$$d\vec{x}\cdot d\vec{x}' = \left(\overline{\overline{F}}(\vec{X},t)d\vec{X}\right)\cdot\left(\overline{\overline{F}}(\vec{X},t)d\vec{X}'\right) = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}dX_i\right)\cdot\left(\frac{\partial x'_k}{\partial X'_j}dX'_j\right)$$

d'où sa variation autour de la transformation

$$d\vec{x}\cdot d\vec{x}' - d\vec{X}\cdot d\vec{X}' = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x'_k}{\partial X'_j} - \delta_{ij}\right)dX_i dX'_j = \left(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}\right)dX_i dX'_j$$

soit

$$d\vec{x}\cdot d\vec{x}' - d\vec{X}\cdot d\vec{X}' = 2\, d\vec{X}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,d\vec{X}'$$

en posant

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{F}}^T(X,t)\,\overline{\overline{F}}(X,t) - \overline{\overline{1}}\right) \tag{2.12}$$

L'application linéaire $\overline{\overline{\varepsilon}}$ est appelée **tenseur des déformations**. Cette application est **symétrique** mais dépend bien sûr de la base $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ initialement choisie.

2.2.2 Remarques

* S'il n'y a pas de déformations, alors $\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{0}}$ (et inversement).

* $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^T\,\overline{\overline{F}}$ est appelé le tenseur des dilatations. Ce tenseur est symétrique.

On peut démontrer:

Théorème 1: Les valeurs propres de $\overline{\overline{C}}$ sont strictement positives.

Théorème 2: $Det\left(\overline{\overline{F}}\right) > 0 \qquad \forall\, t$

Théorème 3: $\overline{\overline{\varepsilon}}$ est symétrique et possède les mêmes vecteurs propres que $\overline{\overline{C}}$.

* Variation de longueur

Soit $d\vec{X}' = d\vec{X} = dl_0\,\vec{e}_x$ et $\left\|d\vec{x}\right\| = dl$, alors

$$d\vec{x}\cdot d\vec{x}' - d\vec{X}\cdot d\vec{X}' = dl^2 - dl_0^2 = 2\, d\vec{X}\ \overline{\overline{\varepsilon}}\ d\vec{X}' = 2dl_0^2\varepsilon_{xx}$$

ou encore, si les déformations sont petites

$$\frac{dl}{dl_0} = \sqrt{1+2\varepsilon_{xx}} \approx 1+\varepsilon_{xx} \rightarrow \varepsilon_{xx} \approx \frac{dl-dl_0}{dl_0}$$

ε_{xx} représente au premier ordre la variation de longueur dans la direction x.

* <u>Variation d'angle</u>

Soit $d\vec{X} = dl_0\ \vec{e}_x$, $d\vec{X} = dl_0\ \vec{e}_y$, alors

$$d\vec{x}\cdot d\vec{x} - d\vec{X}\cdot d\vec{X} = \cos\theta dl dl' = 2\ d\vec{X}\ \overline{\overline{\varepsilon}}\ d\vec{X}' = 2dl_0^2\varepsilon_{xy}$$

ou encore,

$$2\varepsilon_{xy} = \cos\theta\sqrt{1+2\varepsilon_{xx}}\sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}$$

donc ε_{xy} représente au premier ordre la variation d'angle entre les directions x et y.

2.2.3 Autre écriture

D'après (2.3) et (2.1)

$$\overline{\overline{F}}(X,t) = \overline{\overline{\frac{\partial x}{\partial X}}}(X,t) = \overline{\overline{1}} + \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X,t)$$

soit

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X,t) + \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}^T(X,t) + \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}^T(X,t)\overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X,t)\right) \quad (2.13)$$

ou encore en notation indicielle

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)$$

2.2.4 Cas des petites perturbations

Cette hypothèse correspond au cas où $\left\|\vec{u}(X,t)\right\|$ et $\left\|\overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X,t)\right\|$ sont *petits*.

En reprenant (20) et en ne retenant que les termes d'ordre 1, on obtient:

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_{HPP} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X,t) + \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}^T(X,t)\right) \quad (2.14)$$

ou encore en notation indicielle

$$\varepsilon_{ijHPP} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

2.3 Conditions de compatibilité

A tout déplacement $\vec{u}$ on fait correspondre une déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}$. On peut aussi se poser le problème inverse. Ce problème est dit *'problème de compatibilité géométrique d'un champ de déformation'*, ou encore *'problème d'intégrabilité d'un champ de déformation'*.

Les conditions de compatibilité peuvent être établies dans le cas général, cependant nous ne les établirons que dans le cas des petites perturbations.

Décomposons maintenant le gradient des déplacements en une partie symétrique $\overline{\overline{\varepsilon}}$ et une partie antisymétrique $\overline{\overline{\omega}}$.

$$\overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X,t) = \overline{\overline{\varepsilon}}(X,t) + \overline{\overline{\omega}}(X,t)$$

$$\overline{\overline{\omega}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X,t) - \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}^T(X,t)\right) \qquad \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$$

On a

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}$$

soit en dérivant une nouvelle fois

$$\omega_{ij,kl} = \omega_{ij,lk} \quad i,j,k,l \ dans \ \{1,2,3\}$$

$$\forall\ i,j,k,l \quad \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \tag{2.15}$$

ou encore

$$Six\ équations \begin{cases} 2\varepsilon_{23,23} = \varepsilon_{33,22} + \varepsilon_{22,33} & + \ permutation\ circulaire \\ \varepsilon_{13,23} + \varepsilon_{32,31} - \varepsilon_{12,33} - \varepsilon_{33,21} & + \ permutation\ circulaire \end{cases}$$

Réciproquement, si $\overline{\overline{\varepsilon}}$ vérifie (2.15), alors les formes différentielles

$$d\omega_{ij} = \left(\varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}\right) dx_k$$

sont exactes; elles permettent donc de construire le champ $\overline{\overline{\omega}}$ de tenseur antisymétrique. On vérifie ensuite que les formes différentielles

$$du_i = \left(\omega_{ik} + \varepsilon_{ik}\right) dx_k$$

sont exactes, d'où la possibilité de construire un champ de déplacement $\vec{u}(X,t)$ défini dans $\overline{\Omega}_0$.

3 Transport, dérivées particulaires

3.1 Transport d'un volume

Soit $d\Omega_0$ un élément de volume de la configuration de référence, défini par trois vecteurs $d\vec{X}_1, d\vec{X}_2, d\vec{X}_3$. Par la transformation, ces trois vecteurs se transportent en trois vecteurs $d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3$ qui définissent dans la configuration actuelle un volume $d\Omega$.

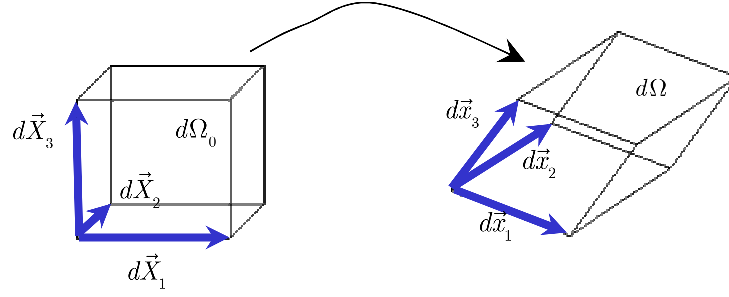


Figure 4 : Transport d'un élément de volume

Le volume $d\Omega$ est représenté par le produit mixte des vecteurs $d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3$:

$$d\Omega = \left(d\vec{x}_1 \wedge d\vec{x}_2\right)\cdot d\vec{x}_3$$

donc

$$d\Omega = \varepsilon_{ijk}\ dx_{1j}\ dx_{2k}\ dx_{3i}$$

Or, d'après (2.11)

$$d\Omega = \varepsilon_{ijk}\ F_{jp}\ F_{kq}\ F_{ir}\ dX_{1p}\ dX_{2q}\ dX_{3r}$$

et, d'après (1.9)

$$d\Omega = \varepsilon_{pqr}\ det(\overline{\overline{F}})\ dX_{1p}\ dX_{2q}\ dX_{3r} = det(\overline{\overline{F}})\left(d\vec{X}_1 \wedge d\vec{X}_2\right)\cdot d\vec{X}_3$$

donc en définitive

$$d\Omega = Det(\overline{\overline{F}})\ d\Omega_0 \tag{2.16}$$

3.2 Transport d'une surface orientée

Soit dS un élément de surface de la configuration de référence de normale $\vec{N}$. Par la transformation, cette surface se transporte en une surface ds de normale $\vec{n}$ dans la configuration actuelle. En considérant un vecteur $\vec{V}$ dans la configuration de référence qui se transporte en un vecteur $\vec{v}$ dans la configuration actuelle, on peut définir l'élément de volume $(dS\ \vec{N})\cdot\vec{V}$ qui se transporte en un élément de volume $(ds\ \vec{n})\cdot\vec{v}$.

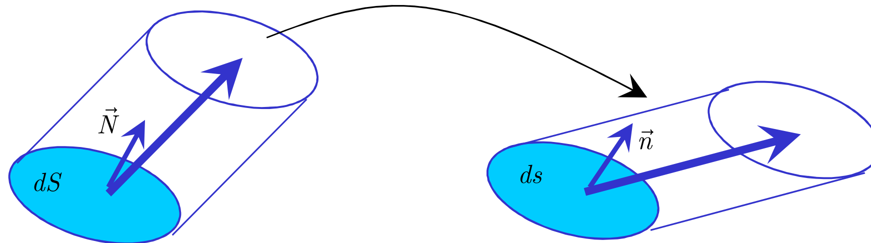


Figure 5 : Transport d'un élément de surface

D'après (2.16)

$$ds\ \vec{n}\cdot\vec{v} = \det(\overline{\overline{F}})\ dS\ \vec{N}\cdot\vec{V}$$

et comme avec (2.11)

$$\vec{v} = \overline{\overline{F}}\ \vec{V}$$

$$ds\ \vec{n}\cdot\left(\overline{\overline{F}}\vec{V}\right) = ds\left(\overline{\overline{F}}^T\ \vec{n}\right)\cdot\vec{V} = \det\overline{\overline{F}}\ dS\ \vec{N}\cdot\vec{V}$$

on obtient finalement

$$ds\ \vec{n} = \det(\overline{\overline{F}})\overline{\overline{F}}^{-T}\ dS\ \vec{N} \tag{2.17}$$

3.3 Dérivée particulaire d'une intégrale de volume

Soit $K(t) = \iiint_{\Omega(t)} k(\vec{x},t)\ d\Omega$, une intégrale de volume sur le domaine $\Omega(t)$ dans la configuration de référence. Pour en déterminer la dérivée temporelle, nous devons au préalable exprimer $K(t)$ sur la configuration de référence pour "passer" la dérivation sous l'intégrale. En effectuant le changement de variable (2.1), et en utilisant (2.16)

$$d\Omega = Det(\overline{\overline{F}})\ d\Omega_0 = J\ d\Omega_0$$

on obtient

$$K(t) = \iiint_{\Omega_0} k(\varphi(\vec{X},t),t)\ J\ d\Omega_0$$

puis

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega_0}\left(\frac{dk}{dt}J + k\frac{dJ}{dt}\right)d\Omega_0$$

A ce stade nous devons expliciter $dJ\ /\ dt$. En utilisant les notations indicielles, et en particulier les symboles de permutation, on a:

$$J = \det\overline{\overline{F}} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}F_{ip}F_{jq}F_{kr}$$

soit

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\frac{\partial F_{ip}}{\partial t}F_{jq}F_{kr}$$

or

$$\frac{\partial F_{ip}}{\partial t} = \frac{\partial^2\varphi_i(\vec{X},t)}{\partial t\ \partial X_p} = \frac{\partial}{\partial X_p}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial X_p}\left(V_i(\vec{X},t)\right) = \frac{\partial}{\partial X_p}\left(v_i(\vec{x},t)\right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial X_p} = \frac{\partial v_i}{\partial x_l}F_{lp}$$

donc

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\frac{\partial v_i}{\partial x_l}F_{lp}F_{jq}F_{kr}$$

mais

$$\varepsilon_{pqr}F_{lp}F_{jq}F_{kr} = \varepsilon_{ljk}\ \det\overline{\overline{F}}$$

soit

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\det\overline{\overline{F}} = \delta_{il}\frac{\partial v_i}{\partial x_l}\det\overline{\overline{F}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}J$$

$$\frac{dJ}{dt} = J\ div\,\vec{v} \tag{2.18}$$

En reportant dans l'expression de $dK\ /\ dt$

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega_0}\left(\frac{dk}{dt}J + k\ J\ div\vec{v}\right)d\Omega_0$$

puis en exprimant l'intégrale sur la configuration actuelle, on obtient finalement

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{dk}{dt} + k \quad div\vec{v} \right) d\Omega \qquad (2.19)$$

En utilisant les égalités suivantes,

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla k$$

$$div(k\vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla k + k div\vec{v}$$

on peut écrire (2.19) sous la forme

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + div\left(k\vec{v}\right) \right) d\Omega$$

ou encore, en utilisant le théorème de la divergence

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \frac{\partial k}{\partial t} \, d\Omega + \iint_{\partial\Omega(t)} k\vec{v} \cdot \vec{n} \, d\partial\Omega$$

<u>Application fondamentale: conservation de la masse</u>

La masse d'un système matériel qu'on suit dans son mouvement reste constante.

$$M = \iiint_{\Omega(t)} \rho(\vec{x}, t) \, d\Omega \quad \text{et} \quad \frac{dM}{dt} = 0$$

où ρ est la masse volumique. On a alors:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \; div\vec{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho\vec{v}\right) = 0 \qquad (2.20)$$

3.4 Dérivée particulaire d'une intégrale de surface

Soit $K(t) = \iint_{\Sigma(t)} \vec{k}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} \, d\Sigma$, une intégrale de volume sur le domaine $\Sigma(t)$ dans la configuration de référence. Pour en déterminer la dérivée temporelle, nous devons au préalable exprimer $K(t)$ sur la configuration de référence pour "passer" la dérivation sous l'intégrale. En effectuant le changement de variable (2.1), et en utilisant (2.17)

$$d\Sigma \; \vec{n} = \det(\overline{\overline{F}}) \overline{\overline{F}}^{-T} \, d\Sigma_0 \vec{N}$$

on obtient

$$K(t) = \iint_{\Sigma_0} \vec{k}\left(\varphi(\vec{X}, t), t\right) \cdot J \; \overline{\overline{F}}^{-T} \, d\Sigma_0 \; \vec{N}$$

puis

$$\frac{dK}{dt} = \iint_{\Sigma_0} \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \cdot J \; \overline{\overline{F}}^{-T} \; \vec{N} + \vec{k} \cdot \frac{d}{dt} \left[J \; \overline{\overline{F}}^{-T} \right] \vec{N} \right) d\Sigma_0$$

on doit donc calculer $d\overline{\overline{F}}^{-T} / dt$

$$\overline{\overline{F}}^{-1} \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{I}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\overline{\overline{F}}^{-1}}{dt} \overline{\overline{F}} + \overline{\overline{F}}^{-1} \frac{d\overline{\overline{F}}}{dt} = \overline{\overline{0}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\overline{\overline{F}}^{-1}}{dt} = -\overline{\overline{F}}^{-1} \frac{d\overline{\overline{F}}}{dt} \overline{\overline{F}}^{-1}$$

$$\frac{d\overline{\overline{F}}}{dt}\overline{\overline{F}}^{-1} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \nabla\vec{v}$$

donc

$$\frac{d\overline{\overline{F}}^{-T}}{dt} = -\left(\overline{\overline{F}}^{-1}\nabla\vec{v}\right)^T = -\nabla^T\vec{v}\,\overline{\overline{F}}^{-T}$$

et

$$\frac{dK}{dt} = \iint_{\Sigma_0}\left(\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot J\,\overline{\overline{F}}^{-T}\vec{N} + \vec{k}\cdot J\,div\vec{v}\,\overline{\overline{F}}^{-T}\vec{N} - \vec{k}\cdot J\,\nabla^T\vec{v}\,\overline{\overline{F}}^{-T}\vec{N}\right)d\Sigma_0$$

$$\frac{dK}{dt} = \iint_{\Sigma_0}\left(\frac{d\vec{k}}{dt} + div\vec{v}\,\vec{k} - \vec{k}\cdot\nabla^T\vec{v}\right)J\,\overline{\overline{F}}^{-T}\vec{N}d\Sigma_0$$

puis en exprimant l'intégrale sur la configuration actuelle, on obtient finalement

$$\frac{dK}{dt} = \iint_{\Sigma(t)}\left(\frac{d\vec{k}}{dt} + div\vec{v}\,\vec{k} - \nabla\vec{v}\,\vec{k}\right)\cdot\vec{n}d\Sigma \qquad (2.21)$$

en utilisant la dérivée particulaire, (2.21) s'écrit

$$\frac{dK}{dt} = \iint_{\Sigma(t)}\left(\frac{\partial\vec{k}}{\partial t} + div\vec{v}\;\vec{k} + \nabla\vec{k}\,\vec{v} - \nabla\vec{v}\,\vec{k}\right)\cdot\vec{n}d\Sigma$$

$$\frac{dK}{dt} = \iint_{\Sigma(t)}\left(\frac{\partial\vec{k}}{\partial t} + \vec{rot}\left(\vec{k}\wedge\vec{v}\right) + \vec{v}\;div\,\vec{k}\right)\cdot\vec{n}d\Sigma$$

car

$$\vec{rot}\left(\vec{k}\wedge\vec{v}\right) = \vec{k}\,div\vec{v} - \vec{v}div\,\vec{k} + \nabla\vec{k}\,\vec{v} - \nabla\vec{v}\,\vec{k}$$

4 A retenir

On appelle Variables de Lagrange le temps et la position initiale : $\vec{X}$ et t

On appelle Variables d'Euler le temps et la position courante : $\vec{x}$ et t

Dérivée particulaire

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right) A$$

Application linéaire tangente

$$\overline{\overline{F}} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

Tenseur des déformations

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{F}}^T (X,t)\, \overline{\overline{F}}(X,t) - \overline{\overline{1}}\right)$$

Tenseur des déformations sous l'hypothèse des petites perturbations

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla^T \vec{u} + \nabla \vec{u}\right)$$

Transport d'un volume

$$d\Omega = Det(\overline{\overline{F}})\ d\Omega_0$$

Transport d'une surface

$$ds\ \vec{n} = \det(\overline{\overline{F}})\overline{\overline{F}}^{-T}\ dS\ \vec{N}$$

Dérivée d'une intégrale de volume

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + div\left(k\vec{v}\right)\right) d\Omega$$

Dérivée d'une intégrale de surface

$$\frac{dK}{dt} = \iint_{\Sigma(t)} \left(\frac{d\vec{k}}{dt} + div\vec{v}\,\vec{k} - \nabla\vec{v}\,\vec{k}\right) \cdot \vec{n} d\Sigma$$

EFFORTS DANS LES MILIEUX CONTINUS

1 Définitions

1.1 Forces

Elles résument les effets mécaniques, autres que cinématiques, exercés sur le milieu continu considéré par le reste du domaine physique. Leur schématisation à chaque instant repose sur la définition d'un champ de vecteur $\vec{\Phi}(\vec{x},t)$ et d'une mesure positive ω, définis sur la configuration actuelle $\overline{\Omega}(t)$. $\vec{\Phi}(\vec{x},t)$ est une densité de force pour la mesure ω.

* Si ω est une mesure de volume, alors $\vec{\Phi}(\vec{x},t)$ est une force volumique (densité volumique de force) définie dans Ω (t) de la configuration actuelle, par la fonction

$$\vec{f}: \quad \vec{x} \in \Omega(t) \rightarrow \vec{f}(\vec{x},t) \in \mathbb{R}^3$$

* Si ω est une mesure de surface, alors $\vec{\Phi}(\vec{x},t)$ est une force surfacique (densité surfacique de force) définie sur $\partial\Omega_F(t)$ de la configuration actuelle, par la fonction

$$\vec{F}: \quad \vec{x} \in \partial\Omega_F(t) \rightarrow \vec{F}(\vec{x},t) \in \mathbb{R}^3$$

* ... etc ...

Remarques:

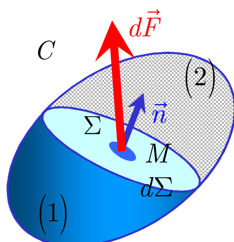
* Les forces sont définies sur la configuration actuelle.

* A un instant donné et en un point donné x de $\partial\Omega(t)$, on ne peut imposer à la fois le déplacement et la force!. Mais l'un des deux doit être imposé. On note $\partial\Omega_F(t)$ la frontière où la force est imposée, et $\partial\Omega_U(t)$ la frontière où le déplacement est imposé. Dans le cas des appuis mobiles, les composantes non imposées cinématiquement le sont pour les forces

* Le monde extérieur au milieu considéré doit, pour imposer le déplacement $\vec{U}(t)$ au bord $\partial\Omega_U(t)$, exercer des forces que nous noterons $\vec{R}(\vec{x},t)$. Comme elles sont à priori inconnues, nous les appellerons **réactions** pour éviter de les confondre avec les autres forces qui, elles, sont données.

1.2 Vecteur-contrainte et tenseur des contraintes

1.2.1 Contrainte de Cauchy



Soit un corps (C) en équilibre par application d'un système d'actions mécaniques extérieures. Imaginons qu'une surface Σ divise (C) en deux parties (1) et (2). La partie (1) est en équilibre sous les actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées et les actions mécaniques exercées par la partie (2). Nous admettrons que sur chaque élément de surface $d\Sigma$ de Σ, (2) exerce sur (1) une force $d\vec{F}(\vec{x},t,\vec{n})_{1/2}$ de densité superficielle $\vec{T}(\vec{x},t,\vec{n})$.

$$d\vec{F}(\vec{x},t,\vec{n})_{1/2} = \vec{T}(\vec{x},t,\vec{n})\, d\Sigma \qquad (3.1)$$

$\vec{T}(\vec{x},t,\vec{n})$ est le **vecteur contrainte** au point x, relativement à la facette $d\Sigma$ définie par son vecteur normal $\vec{n}$.

La densité surfacique de forces exercées en x dépend de x, t et aussi de l'orientation de la surface Σ au voisinage de x. Elle est linéairement dépendante de $\vec{n}$. On introduit alors l'application $\overline{\overline{\sigma}}$ telle que:

$$\vec{T}(\vec{x},t,\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}(\vec{x},t)\ \vec{n} \tag{3.2}$$

L'application $\overline{\overline{\sigma}}(\vec{x},t)$ s'appelle le **tenseur des contraintes de Cauchy** en x à l'instant t ; il caractérise, dans la configuration actuelle, les efforts intérieurs de cohésion exercés sur une partie du solide à travers l'élément de surface $\vec{n}\ d\Sigma$

1.2.2 Autre écriture du tenseur des contraintes

En utilisant (2.17), (3.1) devient:

$$d\vec{F}\left(\vec{x}(\vec{X},t),t,\vec{n}(\vec{N},t)\right) = \overline{\overline{\Pi}}\ \ \vec{N}(\vec{X})\ dS$$

où $\overline{\overline{\Pi}}$ est le tenseur

$$\overline{\overline{\Pi}}(\vec{X},t): \quad \vec{N} \in R^3 \rightarrow \vec{\Pi}(\vec{X},t,\vec{N}) = \overline{\overline{\Pi}}(\vec{X},t)\vec{N} \qquad \in\ \mathbb{R}^3$$

défini par

$$\overline{\overline{\Pi}}(\vec{X},t) = (\det \overline{\overline{F}})\ \overline{\overline{\sigma}}\ \overline{\overline{F}}^{-T} \tag{3.3}$$

Cette application linéaire $\overline{\overline{\Pi}}(\vec{X},t)$, définie pour $X \in \overline{\Omega}_0$, s'appelle le **premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff** en X à l'instant t; la composante Π_{ij} est la i^{ème} composante du vecteur contrainte exercée sur la déformée d'une surface unité, normale à $\vec{e}_j$, de la configuration de référence. *On prendra garde au fait que le tenseur $\overline{\overline{\Pi}}$ n'est pas symétrique.*

Si maintenant on cherche le vecteur "force de cohésion" dans la configuration de référence

$$d\vec{F}_0\left(\vec{X},t,\vec{N}\right) = \overline{\overline{F}}^{-1}\ (\vec{X},t)\ d\vec{F}\left(\vec{x}(X,t),t,\vec{n}(\vec{N},t)\right) = \overline{\overline{S}}\ \vec{N}(\vec{X})\ dS$$

où $\overline{\overline{S}}$ est le tenseur défini par

$$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{F}}^{-1}\ \overline{\overline{\Pi}} \tag{3.4}$$

Cette application linéaire $\overline{\overline{S}}(X,t)$, définie pour $X \in \overline{\Omega}_0$, s'appelle le **second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff** en X à l'instant t. Attention, sa composante S_{ij} **n'**est **pas** la i^{ème} composante du vecteur contrainte exercée sur la déformée d'une surface unité, normale à $\vec{e}_j$, de la configuration de référence, mais seulement la i^{eme} composante de son transporté dans la configuration de référence.

Selon le jeu d'écriture adopté, on a donc trois descriptions des contraintes:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \left(\det \overline{\overline{F}}\right)^{-1} \overline{\overline{\Pi}}\ \overline{\overline{F}}^{T} = \left(\det \overline{\overline{F}}\right)^{-1} \overline{\overline{F}}\ \overline{\overline{S}}\ \overline{\overline{F}}^{T} \tag{3.5}$$

2 Equilibre

2.1 Le Principe des Puissances Virtuelles (Germain 1972)

Pour schématiser les efforts mis en jeu, il est commode d'imaginer des mouvements fictifs (ou virtuels) et d'analyser le travail ou la puissance qui en résulte. Par exemple, pour évaluer les forces de gravité agissant sur un objet, on peut imaginer de le soulever (mouvement virtuel de bas en haut).

Un milieu matériel étant isolé, on peut distinguer les actions extérieures qui agissent sur le milieu, des actions intérieures qui représentent les liaisons existant entre toutes les parties du milieu.

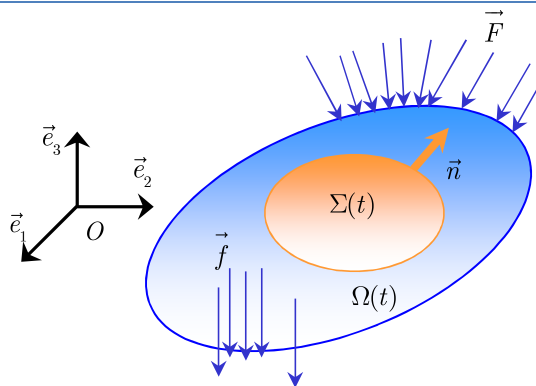
Axiome d'objectivité

La puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à tout mouvement rigidifiant est nulle.

Axiome d'équilibre

Pour tout milieu matériel repéré dans un référentiel absolu, à chaque instant et pour tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération $\prod_a$ *est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs* $\prod_i$ *et des efforts extérieurs* $\prod_e$.

2.2 Puissance virtuelle des efforts intérieurs



Soit un milieu continu $\overline{\Omega}(t)$ d'intérieur $\Omega(t)$ et de frontière $\partial\Omega$ (t). Isolons maintenant un domaine $\Sigma(t)$ de frontière $\partial\Sigma$ (t) intérieur à Ω (t), et soit $\vec{n}$ la normale en un point de $\partial\Sigma(t)$. A un instant t fixé, un mouvement virtuel défini par une vitesse virtuelle $\delta\vec{v}$ est appliqué à $\Sigma(t)$. Cette vitesse est supposée continue et continûment dérivable sur $\Sigma(t)$.

Pour déterminer la puissance virtuelle des efforts intérieurs nous ferons les hypothèses suivantes:

* Π_i *admet une densité volumique* p_i:

$$\Pi_i = \iiint_\Sigma p_i \, dx$$

* Π_i *est en chaque point une forme linéaire des valeurs en ce point de* $d\vec{v}$ *et de ses dérivées premières:*

En décomposant le gradient des vitesses virtuelles en une partie symétrique $\overline{\overline{\delta D}}$ et une partie antisymétrique $\overline{\overline{\delta W}}$,

$$\overline{\overline{\frac{\partial \delta v}{\partial x}}} = \overline{\overline{\delta D}} + \overline{\overline{\delta W}}$$

$$\overline{\overline{\delta W}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\frac{\partial \delta v}{\partial x}}} - \overline{\overline{\frac{\partial \delta v}{\partial x}}}^T\right) \qquad \delta W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\overline{\overline{\delta D}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{\frac{\partial \delta v}{\partial x}}} + \overline{\overline{\frac{\partial \delta v}{\partial x}}}^T\right) \qquad \delta D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i}\right)$$

la densité volumique des efforts intérieurs devient:

$$p_i = A_i \delta V_i + B_{ij} \delta W_{ji} - \sigma_{ij} \delta D_{ji}$$

Le premier axiome du principe des puissances virtuelles impose que pour tout mouvement de solide rigide la puissance des efforts intérieurs soit nulle. D'où:

- Soit un mouvement de translation: $\delta\vec{v} \neq \vec{0}$, $\overline{\overline{\delta W}} = \overline{\overline{0}}$ et $\overline{\overline{\delta D}} = \overline{\overline{0}}$

alors

$$\Pi_i = \iiint_\Sigma p_i \; dx = \iiint_\Sigma \vec{A} \cdot \delta\vec{v} \; dx = 0 \quad \forall \Sigma \text{ dans } \Omega$$

soit $\vec{A} \cdot \delta\vec{v} = 0 \quad \forall\, \delta\vec{v}$, ou encore $\vec{A} = \vec{0}$

- Soit un mouvement de rotation: $\delta\vec{v} = \vec{0}$, $\overline{\overline{\delta W}} \neq \overline{\overline{0}}$ et $\overline{\overline{\delta D}} = \overline{\overline{0}}$

alors

$$\Pi_i = \iiint_\Sigma p_i \; dx = \iiint_\Sigma \overline{\overline{B}} : \overline{\overline{\delta W}} \; dx = 0 \quad \forall \Sigma \text{ dans } \Omega$$

soit $\overline{\overline{B}} : \overline{\overline{\delta W}} = \overline{\overline{0}} \quad \forall\, \overline{\overline{\delta W}}$, ou encore $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{0}}$.

Donc en définitive:

$$\Pi_i = -\iiint_\Sigma \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\delta D}} \; dx \tag{3.6}$$

On peut montrer que le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$ introduit ici correspond bien au tenseur des contraintes de Cauchy.

2.3 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Les efforts extérieurs comprennent

- des efforts exercés à distance par des systèmes extérieurs à Ω, supposés définis par une densité volumique de forces $\vec{f}$,

- des efforts de cohésion schématisés par une densité surfacique de force $\vec{T}$ sur $\partial\Sigma$

$$\Pi_e = \iiint_\Sigma \vec{f} \cdot \delta\vec{v} \; dx + \iint_{\partial\Sigma} \vec{T} \cdot \delta\vec{v} \; dx \tag{3.7}$$

2.4 Application du Principe des Puissances Virtuelles

Si $\vec{\gamma}$ est l'accélération et ρ la masse volumique de chacun des points de $\sum$, alors

$$\Pi_a = \frac{d}{dt}\iiint_\Sigma \rho \; \vec{v} \cdot \delta\vec{v} \; dx = \iiint_\Sigma \left(\frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} + div(\rho\vec{v} \otimes \vec{v})\right) \cdot \delta\vec{v} \; dx$$

$$\Pi_a = \iiint_\Sigma \left(\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla\vec{v} \cdot \vec{v} + div(\rho\vec{v})\vec{v}\right) \cdot \delta\vec{v} \; dx$$

et en utilisant la conservation de la masse (2.20) et la définition de l'accélération (2.10)

$$\Pi_a = \iiint_\Sigma \rho \; \vec{\gamma} \cdot \delta\vec{v} \; dx \tag{3.8}$$

En application du Principe des Puissances Virtuelles on obtient:

$$-\iiint_{\Sigma} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\delta D}}\, dx + \iiint_{\Sigma} \vec{f} \cdot \vec{\delta v}\, dx + \iint_{\partial\Sigma} \vec{T} \cdot \vec{\delta v}\, dx = \iiint_{\Sigma} \rho\, \vec{\gamma} \cdot \vec{\delta v}\, dx \tag{3.9}$$

Pour exploiter le fait que (3.9) est vérifié pour tout mouvement virtuel, nous allons faire apparaître $\vec{\delta v}$ dans chacun des termes.

En appliquant le théorème de la divergence, le premier terme devient:

$$-\iiint_{\Sigma} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\delta D}}\, dx = -\iiint_{\Sigma} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\frac{\partial \delta v}{\partial x}}}\, dx = -\iint_{\partial\Sigma} \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{\delta v} \cdot \vec{n}\, dx + \iiint_{\Sigma} div_x \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{\delta v}\, dx$$

Soit:

$$\iint_{\partial\Sigma} \left(\vec{T} - \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}\right) \cdot \vec{\delta v}\, dx + \iiint_{\Sigma} \left(\vec{f} + div_x \overline{\overline{\sigma}} - \rho \vec{\gamma}\right) \cdot \vec{\delta v}\, dx \qquad \forall\, \vec{\delta v}$$

Ou encore

$$\begin{cases} \vec{f} + div_x \overline{\overline{\sigma}} = \rho \vec{\gamma} & dans\ \Sigma \\ \vec{T} = \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} & sur\ \partial\Sigma \end{cases} \tag{3.10}$$

2.5 Equilibre

En considérant les développements du paragraphe précédent et en se ramenant au domaine $\Omega(t)$, nous pouvons donc écrire les équations d'équilibre d'un solide soumis à un champ de forces extérieures $\vec{f}$ dans $\Omega(t)$, à un champ de forces extérieures $\vec{F_e}$ sur $\partial\Omega_F(t)$ et à un déplacement imposé $\vec{U_i}$ sur $\partial\Omega_U(t)$.

Dans la configuration actuelle:

$$\vec{f}(x,t) + div_x \overline{\overline{\sigma}}(x,t) = \vec{0} \qquad \forall\, x \in \Omega(t) \tag{3.11}$$

$$\overline{\overline{\sigma}}(x,t) \cdot \vec{n}(x,t) = \begin{cases} \vec{F_e}(x,t) & \forall\, x \in \partial\Omega_F(t) \\ \vec{R}(x,t) & \forall\, x \in \partial\Omega_U(t) \end{cases} \tag{3.12}$$

Dans la configuration de référence:

De même, si on note $\vec{f}_0$, $\vec{R_0}$ et $\vec{F_0}$ les densités volumiques et surfaciques de forces mesurées dans la configuration de référence:

$$\vec{f}_0(X,t) + div_X \overline{\overline{\Pi}}(X,t) = \vec{0} \qquad \forall\, x \in \Omega_0 \tag{3.13}$$

$$\overline{\overline{\Pi}}(X,t) \cdot \vec{N}(X,t) = \begin{cases} \vec{F_0}(x,t) & \forall\, x \in x^{-1}(\partial\Omega_F(t),t) \\ \vec{R}_0(x,t) & \forall\, x \in \partial\Omega_{0U} \end{cases} \tag{3.14}$$

Cas des petites perturbations

Reprenons (3.10), en l'exprimant en fonction de X

$$f_i\left(x(X,t),t\right) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(x(X,t),t) = 0 \qquad \forall\, x(X,t) \in \Omega(t)$$

$$f_i\left(x(X,t),t\right) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k}(X,t)\, \frac{\partial X_k}{\partial x_j}(X,t) = 0 \qquad \forall\, X \in \Omega_0$$

Or $\vec{x}(X,t) = \vec{X} + \vec{u}(X,t)$ soit $\overline{\overline{\frac{\partial x}{\partial X}}}(X,t) = \overline{\overline{1}} + \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X,t)$

On peut donc écrire l'équation d'équilibre sous la forme

$$f_i\left(x(X,t),t\right) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k}(X,t)\left[\overline{\overline{1}} + \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X,t)\right]^{-1}_{kj} = 0 \qquad \forall\ X \in \Omega_0$$

Sous l'hypothèse des petites perturbations, on peut alors écrire:

$$\left[\overline{\overline{1}} + \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X,t)\right]^{-1} = \overline{\overline{1}} - \overline{\overline{\frac{\partial u}{\partial X}}}(X,t)$$

soit

$$f_i\left(x(X,t),t\right) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k}(X,t)\left[\delta_{jk} - \frac{\partial u_k}{\partial X_j}(X,t)\right] = 0 \qquad \forall\ X \in \Omega_0$$

Enfin, en ne retenant que les termes d'ordre 0, et après avoir effectué un développement de f_i au voisinage de X, on obtient:

$$f_i\left(X,t\right) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j}(X,t) = 0 \qquad \forall\ X \in \Omega_0$$

soit

$$\vec{f}(X,t) + div_X\,\overline{\overline{\sigma}}(X,t) = \vec{0} \qquad \forall\ x \in \Omega_0 \tag{3.15}$$

Le raisonnement qui a permis de remplacer $\vec{f}\left(x(X,t)\right)$ par $\vec{f}\left(X,t\right)$, permet aussi de remplacer $\vec{F}_e(x(X,t))$ par $\vec{F}_e(X,t)$ et $\vec{R}(x(X,t))$ par $\vec{R}(X,t)$. Donc, comme condition sur la frontière on obtient:

$$\overline{\overline{\sigma}}(X,t)\cdot\vec{N}(X,t) = \begin{cases}\vec{F}_e(X,t) & \forall\ X \in \partial\Omega_{0F} \\ \vec{R}(X,t) & \forall\ X \in \partial\Omega_{0U}\end{cases} \tag{3.16}$$

2.6 Autre présentation: Principe fondamental de la dynamique

(3.10) revient à écrire le Principe Fondamental de la dynamique. Dans un repère galiléen, pour tout système Σ, le torseur dynamique (dérivée par rapport au temps du torseur cinématique) est égal à la somme des torseurs des actions intérieures. Soit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Sigma \vec{v}\,dm &= \frac{d}{dt}\int_\Sigma \vec{v}\,\rho d\Sigma \\ &= \int_\Sigma \left(\frac{d\vec{v}\,\rho}{dt} + \vec{v}\,\rho div\vec{v}\right) d\Sigma \\ &= \int_\Sigma \left(\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{d\rho}{dt} + \vec{v}\,\rho div\vec{v}\right) d\Sigma \\ &= \int_\Sigma \left(\rho\vec{\gamma} + \vec{v}\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v}\right)\right) d\Sigma\end{aligned}$$

donc avec la conservation de la masse

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma}\vec{v}\,dm = \int_{\Sigma}\rho\vec{\gamma}d\Sigma$$
$$= \int_{\Sigma}\vec{f}d\Sigma + \int_{\partial\Sigma}\overline{\overline{\sigma}}\vec{n}d\partial\Sigma$$

et le théorème de la divergence

$$\int_{\Sigma}\rho\vec{\gamma}d\Sigma = \int_{\Sigma}\vec{f}d\Sigma + \int_{\Sigma}div\overline{\overline{\sigma}}d\Sigma$$

on retrouve le bilan de la quantité de mouvement

$$div\overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} = \rho\vec{\gamma}$$

L'équation de bilan sur les moments du principe fondamental de la dynamique s'écrit:

$$\iiint_{\Sigma}\overrightarrow{OM}\wedge\frac{d\vec{v}}{dt}\,dm = \iint_{\partial\Sigma}\overrightarrow{OM}\wedge\overline{\overline{\sigma}}\cdot\vec{n}\,dx + \iiint_{\Sigma}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{f}\,dx \qquad (3.17)$$

3 Quelques propriétés du tenseur des contraintes

Dans tous les développements à venir, nous nous placerons dans le cas des petites perturbations pour un solide en équilibre. En conséquence, nous omettrons les variables x et t.

3.1 Symétrie du tenseur des contraintes

On sait que

$$\iiint_{\Omega}\overrightarrow{OM}\wedge\left(\rho\vec{\gamma}-\vec{f}\right)dx = \iint_{\partial\Omega}\overrightarrow{OM}\wedge\overline{\overline{\sigma}}\vec{n}\,dx$$

soit en notation indicielle

$$\iiint_{\Omega}\varepsilon_{ijk}x_j(\rho\gamma_k - f_k)\,\vec{e}_i\,dx = \iint_{\partial\Omega}\varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl}n_l\,\vec{e}_i\,dx$$

puis, par application du théorème de la divergence

$$\iiint_{\Omega}\left[\varepsilon_{ijk}x_j(\rho\gamma_k - f_k) - \frac{\partial}{\partial x_l}(\varepsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl})\right]\vec{e}_i\,dx = 0$$
$$\iiint_{\Omega}\left[\varepsilon_{ijk}x_j(\rho\gamma_k - f_k - \sigma_{kl,l}) - \varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}\right]\vec{e}_i\,dx = 0$$

et par application de l'équation du mouvement

$$\iiint_{\Omega}\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj}\vec{e}_i\,dx = 0 \qquad \forall\ \Omega(t)$$

c'est à dire

$$\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0 \quad \forall i$$

ce qui implique

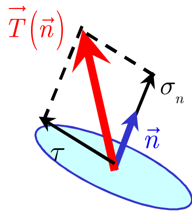
$$\varepsilon_{123}\sigma_{23} + \varepsilon_{132}\sigma_{32} = 0 \quad \varepsilon_{213}\sigma_{13} + \varepsilon_{231}\sigma_{31} = 0 \quad \varepsilon_{312}\sigma_{12} + \varepsilon_{321}\sigma_{21} = 0$$
$$+\sigma_{23} - \sigma_{32} = 0 \quad -\sigma_{13} + \sigma_{31} = 0 \quad +\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0$$

donc en définitive

$$\sigma_{pq} = \sigma_{qp}$$

Le tenseur des contraintes est symétrique

3.2 Contrainte normale et contrainte tangentielle



Considérons une facette de normale $\vec{n}$. Tout naturellement, le vecteur contrainte $\vec{T}(\vec{n})$ peut être décomposé en une composante normale σ_n et une composante tangentielle τ.

$$\sigma_n = \vec{T}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n} \tag{3.18}$$

et

$$\|\tau\| = \sqrt{\left(\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}\right)^2 - \left(\vec{n} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}\right)^2} \tag{3.19}$$

On dira que σ_n est positive en traction et négative en compression.

3.3 Directions principales, contraintes principales

La matrice représentant le tenseur des contraintes est symétrique, elle est donc diagonalisable. Les valeurs propres sont réelles et appelées **contraintes principales** $\left(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}\right)$. Les vecteurs propres, orthogonaux deux à deux, sont les **directions principales** $\left(\vec{n}_I, \vec{n}_{II}, \vec{n}_{III}\right)$. On a donc:

$$\sigma_I = \vec{T}(\vec{n}_I) \cdot \vec{n}_I \quad , \quad \sigma_{II} = \vec{T}(\vec{n}_{II}) \cdot \vec{n}_{II} \quad , \quad \sigma_{III} = \vec{T}(\vec{n}_{III}) \cdot \vec{n}_{III}$$

3.4 Invariants

Le tenseur des contraintes possède trois invariants définis mathématiquement comme les coefficients de l'équation caractéristique $\det\left(\overline{\overline{\sigma}} - \alpha\, \overline{\overline{1}}\right)$. C'est à dire les quantité scalaires:

$$\Sigma_I = Tr(\overline{\overline{\sigma}}) \tag{3.20}$$

$$\Sigma_{II} = \frac{1}{2}\left[Tr(\overline{\overline{\sigma}})^2 - Tr(\overline{\overline{\sigma}}^{\,2})\right] \tag{3.21}$$

$$\Sigma_{III} = Det(\overline{\overline{\sigma}}) \tag{3.22}$$

Exprimés en fonction des contraintes principales, on obtient

$$\Sigma_I = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$\Sigma_{II} = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I$$

$$\Sigma_{III} = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}$$

3.5 Cercles de Mohr

Connaissant le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$, on se propose de déterminer le domaine engendré par l'extrémité du vecteur contrainte quand $\vec{n}$ varie. Par commodité, nous nous plaçons dans une base orthonormée dirigée suivant les directions principales de $\overline{\overline{\sigma}}$. Soit

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad , \qquad \overset{=}{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \qquad et \qquad \vec{T} = \begin{Bmatrix} n_1\, \sigma_I \\ n_2\, \sigma_{II} \\ n_3\, \sigma_{III} \end{Bmatrix}$$

avec $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

on trouve aisément

$$\sigma_n = \sigma_I\, n_1^2 + \sigma_{II}\, n_2^2 + \sigma_{III}\, n_3^2$$

et

$$\tau^2 + \sigma_n^2 = \sigma_I^2\, n_1^2 + \sigma_{II}^2\, n_2^2 + \sigma_{III}^2\, n_3^2$$

Dans l'hypothèse où les contraintes principales sont distinctes, on obtient alors après résolution du système:

$$n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_I - \sigma_{III})}$$

$$n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{III})}{(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{II} - \sigma_{III})}$$

$$n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II})}{(\sigma_{III} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_{II})}$$

Si on ordonne les contraintes principales de telle sorte que $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$, alors

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_{II})(\sigma_n - \sigma_{III}) \geq 0$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{III}) \leq 0$$

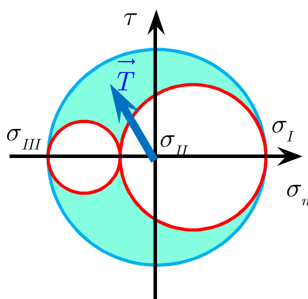
$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_I)(\sigma_n - \sigma_{II}) \geq 0$$

ou encore

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right)^2 \tag{3.23}$$

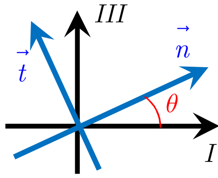
$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right)^2 \tag{3.24}$$

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right)^2 \tag{3.25}$$



Dans le plan de Mohr, l'extrémité du vecteur contrainte, d'après (3.24), est donc intérieure au cercle centré sur $O\sigma_n$ d'abscisse $(\sigma_I + \sigma_{III})/2$ et de rayon $(\sigma_I - \sigma_{III})/2$. Par contre, d'après (3.23) (res. (3.25)), l'extrémité du vecteur contrainte est extérieure au cercle centré sur $O\sigma_n$ d'abscisses $(\sigma_{II} + \sigma_{III})/2$ (resp.($(\sigma_I + \sigma_{II})/2$) et de rayon $(\sigma_{II} - \sigma_{III})/2$ (resp. $(\sigma_I + \sigma_{II})/2$).

Description des Cercles principaux:



Nous allons étudier la description du grand Cercle de Mohr. Les facettes concernées sont parallèles à la direction associée à la contrainte principale σ_{II} .

On constitue avec les directions I, III, II un trièdre direct $(O, \vec{e}_I, \vec{e}_{III}, \vec{e}_{II})$, la normale $\vec{n}$ de la facette évoluant dans le plan $I\ III$.

Et on définit l'angle $\theta = \left(I, \vec{n}\right)$, et le vecteur $\vec{t}$ tel que $(\vec{n}, \vec{t}, II)$ soit direct.

On a alors

$$\vec{n} = Cos\theta\ \vec{e}_I + Sin\theta\ \vec{e}_{III}$$

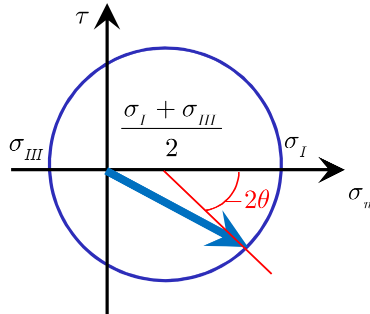
et

$$\vec{T} = \sigma_I\ Cos\theta\ \vec{e}_I + \sigma_{III}\ Sin\theta\ \vec{e}_{III}$$

En utilisant les formules de changement de base de $(O, \vec{e}_I, \vec{e}_{III}, \vec{e}_{II})$ à $(\vec{n}, \vec{t}, II)$, on a donc

$$\sigma_n = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\ Cos2\theta$$

$$\tau = -\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\ Sin2\theta$$



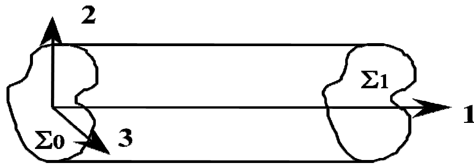
Lorsque la facette tourne autour de la direction de la contrainte principale σ_{II} d'un angle donné, l'extrémité du vecteur-contrainte tourne sur le cercle de Mohr d'un angle double dans le sens opposé (autour du centre du cercle).

4 Exemples de tenseur des contraintes

4.1 Tenseur uniaxial

$$\overline{\overline{\sigma}} = \sigma \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équilibre des forces sur la frontière du domaine nous donne:



Sur Σ_0 : $\vec{n} = -\vec{e}_1$ donc $\overline{\overline{\sigma}}\vec{n} = \vec{F}_0 \; et \; \vec{F}_0 = -\sigma\vec{e}_1$

Sur Σ_1 : $\vec{n} = \vec{e}_1$ donc $\overline{\overline{\sigma}}\vec{n} = \vec{F}_1 \; et \; \vec{F}_1 = \sigma\vec{e}_1$

Sur la frontière latérale les pressions sont nulles.

On se trouve en présence d'un chargement uniaxial de traction/compression.

Si $\sigma > 0$ c'est un état de tension uniaxiale

Si $\sigma < 0$ c'est un état de compression uniaxiale

La direction principale est $\vec{e}_1$

4.2 Tenseur sphérique

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, toute direction est direction principale. La contrainte normale principale est $-p$. p est appelé la pression. Si $p > 0$ on a un état de compression, et si $p < 0$ on a un état de tension.

Par exemple pour un fluide au repos:

D'après l'équation d'équilibre

$$\begin{aligned} & div\overline{\overline{\sigma}} + \rho\vec{g} = \vec{0} \\ & -divp\overline{\overline{I}} + \rho\vec{g} = \vec{0} \\ & -\overrightarrow{gradp} + \rho\vec{g} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$soit \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \;\; et \;\; \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

$$et \quad p = p_0 - \rho g x_3$$

Donc, pour un fluide au repos $p + \rho g x_3 = Cste$.

5 A retenir

Vecteur contrainte et tenseur des contraintes de Cauchy

$$\vec{T}(\vec{x},t,\vec{n}) = \overset{=}{\sigma}(\vec{x},t)\,\vec{n}$$

Le tenseur des contraintes est symétrique !

Equilibre

$$\vec{f}(x,t) + div_x \overset{=}{\sigma}(x,t) = \vec{0} \qquad \forall\ x \in \Omega(t)$$

$$\overset{=}{\sigma}(x,t)\cdot\vec{n}(x,t) = \begin{cases} \vec{F}_e(x,t) & \forall\ x \in \partial\Omega_F(t) \\ \vec{R}(x,t) & \forall\ x \in \partial\Omega_U(t) \end{cases}$$

Contrainte normale

$$\sigma_n = \vec{T}(\vec{n})\cdot\vec{n} = \vec{n}\cdot\overset{=}{\sigma}\cdot\vec{n}$$

Contrainte tangentielle

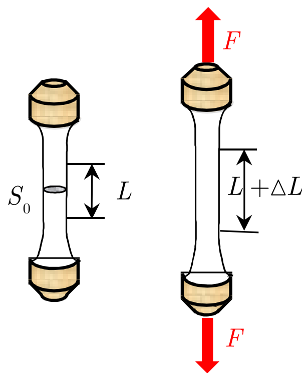
$$\|\tau\| = \sqrt{\left(\overset{=}{\sigma}\cdot\vec{n}\right)^2 - \left(\vec{n}\cdot\overset{=}{\sigma}\cdot\vec{n}\right)^2}$$

ELASTICITE

1 Approche expérimentale: essai de traction

Pour déterminer l'évolution d'un système déformable, nous avons déjà déterminé les équations de la cinématique et de la sthénique. A ces équations, il est maintenant nécessaire d'adjoindre une relation supplémentaire reliant les efforts internes et les grandeurs cinématiques. Cette relation, appelée **Loi de Comportement**, dépend du matériau considéré. La construction d'une loi de comportement est basée sur des observations expérimentales.

Dans ce chapitre nous exposerons le modèle de comportement des matériaux élastiques, sous l'hypothèse des petites perturbations.



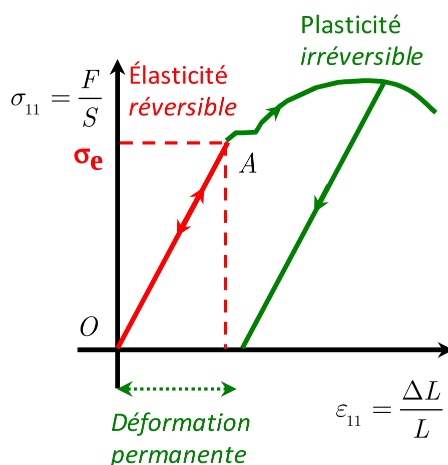
Pour effectuer un essai de traction simple sur un métal, on utilise une éprouvette cylindrique caractérisée par:

- des extrémités surdimensionnées

- des congés de raccordement (pour éviter les concentrations de contrainte)

- une partie médiane cylindrique dans laquelle le champ de contrainte est supposé homogène, de traction simple parallèlement à l'axe de l'éprouvette.

L'essai de traction consiste à enregistrer l'évolution de l'allongement relatif de la longueur initiale L_0 en fonction de la force de traction F, ou du rapport F / S_0, où S_0 représente l'aire initiale de la section de l'éprouvette.



La figure ci-contre représente un tel enregistrement pour un acier inox. On remarque alors les propriétés suivantes:

- Le diagramme est indépendant de la vitesse de chargement

- La partie OA du diagramme est réversible. Si on charge jusqu'à un niveau inférieur à σ_0, alors la décharge décrit la même courbe OA.

- La partie réversible est linéaire

- Si on effectue un chargement au delà du seuil σ_0, puis une décharge, l'éprouvette présente une déformation permanente.

La partie réversible du diagramme de traction est, par définition, représentative du **comportement élastique** du matériau. σ_0 est la limite initiale d'élasticité du matériau. La linéarité du segment OA A caractérise le **comportement élastique linéaire** du matériau.

2 Loi de comportement élastique linéaire (en HPP)

2.1 Forme générale

A partir des observations expérimentales on peut écrire que les contraintes dépendent linéairement des déformations. En l'absence d'effets thermique et de contraintes initiales on a:

$$\overset{=}{\sigma}(x,t) = \overset{\equiv}{C}(x) : \overset{=}{\varepsilon}(x,t) \tag{4.1}$$

$\overset{\equiv}{C}$ est un tenseur du quatrième ordre, dont les composantes sont les coefficients d'élasticité du matériau.

$$\sigma_{ij}(x,t) = C_{ijkl}\ \varepsilon_{kl}(x,t)$$

En utilisant les propriétés des tenseurs de contrainte et de déformation, on peut montrer que:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

Le tenseur $\overset{\equiv}{C}$, dont la matrice représentative comporte 81 composantes, ne dépend donc plus que de 21 paramètres indépendants.

2.2 Matériau élastique homogène isotrope

Toutes les directions sont équivalentes, de telle sorte que la loi de comportement est invariante dans toute rotation de la configuration de référence. Ce modèle s'applique à la plupart des matériaux: acier, béton, ...

Si la configuration est libre de contraintes, alors la loi de comportement s'écrit:

$$\overset{=}{\sigma} = \lambda\ Tr(\overset{=}{\varepsilon})\ \overset{=}{1} + 2\ \mu\ \overset{=}{\varepsilon} \tag{4.2}$$

ou encore en notation indicielle

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Les coefficients matériel λ et μ, qui dépendent de la particule considérée, sont appelés les **coefficients de Lamé**. Leur expression en fonction du **module d'Young E** et du **coefficient de Poisson** ν, est

$$\mu = \frac{E}{2\ (1+\nu)} \quad et \quad \lambda = \frac{\nu\ E}{(1+\nu)\ (1-2\nu)}$$

ou

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad et \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

avec, en inversant (4.2)

$$\overset{=}{\varepsilon} = \quad -\frac{\nu}{E}\, Tr(\overset{=}{\sigma})\ \overset{=}{1} \quad + \quad \frac{1+\nu}{E}\,\overset{=}{\sigma} \tag{4.3}$$

2.3 Matériau élastique homogène orthotrope

Le matériau possède trois directions privilégiées deux à deux orthogonales. La loi de comportement est invariante par les symétries par rapport aux plans orthogonaux construits à partir de ces directions. Dans ces matériaux, on peut classer les tôles laminées, les composites tissés, le bois, certains bétons structurés, ...

Dans ce cas on montre que la matrice de comportement est définie par 9 paramètres indépendants. Dans le repère principal d'orthotropie, la loi se met sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

Avec les conditions de symétrie

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$$

2.4 Matériau élastique homogène isotrope transverse

Un matériau homogène isotrope transverse est tel que la matrice de comportement est invariante par toute rotation autour d'un axe privilégié. En utilisant cette invariance, on montre que seuls 5 paramètres indépendants caractérisent le comportement. Si l'axe est porté par la direction 3, on a alors:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

2.5 Caractéristiques de quelques matériaux

Matériaux isotropes usuels:

Matériau	**E en Gpa**	ν	ρ **en kg/l**
acier	210	0.285	7.8
fonte grise	90 à 120	0.29	7.1
aluminium	71	0.34	2.6
béton	10	0.15	2.4
fibre de verre E	73	0.15	2.54
Graphite HM	350	0.4	1.92
résine époxy	3.8	0.31	1.15

Matériaux composites:

	Unidirectionnel Verre/Epoxy 50%	Tissu Verre/Epoxy 50%	Unidirectionnel CarboneHT/Epoxy 50%	Unidirectionnel Kevlar/Epoxy 50%
ρ en g/cm ^{3}	1,87	1,87	1,49	1,32
E_1 en Mpa	38000	21000	116000	65000
E_2 en Mpa	11500	21000	7500	4900
ν_{12}	0,28	0,26	0,32	0,34

2.6 Critères de limite d'élasticité

Les critères de résistance que nous allons définir représentent des valeurs limites pour les contraintes maximales, et permettent de ce fait de garder un caractère élastique aux déformations.

2.6.1 Critère de Tresca

Il consiste à considérer de manière indépendante les trois contraintes de cisaillement maximal du tricercle de Mohr. Soit en fonction des contraintes principales

$$Sup\left\{\left|\sigma_I - \sigma_{II}\right|, \left|\sigma_I - \sigma_{III}\right|, \left|\sigma_{II} - \sigma_{III}\right|\right\} \quad \leq \quad 2\sigma_0 \tag{4.6}$$

2.6.2 Critère de Von-Mises

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2\right]} \quad \leq \quad \sigma_0 \tag{4.7}$$

ou encore

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left((\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)\right)} \quad \leq \quad \sigma_0$$

2.6.3 Critère de Hill

le critère de Hill s'applique dans le cas de matériaux élastique orthotropes

$$F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1 \tag{4.8}$$

où F, H, G, L, M, N sont des constantes fonctions des contraintes à ruptures.

3 Le problème d'élasticité

3.1 Ecriture générale

Cinématique : + Equations de compatibilité

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}\right)$$

$$\vec{u} = \vec{U}_0(X) \quad sur\ \partial\Omega_U$$

Equilibre :

$$div\,\bar{\bar{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0} \qquad dans\ \Omega$$

$$\bar{\bar{\sigma}}\,\vec{n} = \begin{cases} \vec{F} & sur\ \partial\Omega_F \\ \vec{R} & sur\ \partial\Omega_U \end{cases}$$

Loi de comportement :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda Tr(\bar{\bar{\varepsilon}})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{\varepsilon}}$$

3.2 Formulation en déplacement

$$div\,\bar{\bar{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0}$$
$$div\,(\lambda Tr(\bar{\bar{\varepsilon}})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{\varepsilon}}) + \vec{f} = \vec{0}$$
$$\lambda\nabla(Tr(\bar{\bar{\varepsilon}})) + 2\mu div(\bar{\bar{\varepsilon}}) + \vec{f} = \vec{0}$$
$$\lambda\nabla(div\,\vec{u}) + \mu div(\nabla\vec{u}) + \mu div(\nabla^T\vec{u}) + \vec{f} = \vec{0}$$

soit **l'équation de Navier**

$$(\lambda+\mu)\nabla(div\,\vec{u}) + \mu div(\nabla\vec{u}) + \vec{f} = \vec{0} \tag{4.9}$$

Remarque: Si on prend la divergence de l'équation de Navier

$$(\lambda+2\mu)\Delta(div\,\vec{u}) + div(\vec{f}) = 0$$

Donc, si le champ de forces volumiques est tel que $div\vec{f} = \vec{0}$ alors $div\,\vec{u}$ est une fonction harmonique.

3.3 Formulation en contrainte

En partant de l'écriture des équations de compatibilité, on peut démontrer les **équations de Michell**

$$div(\nabla\bar{\bar{\sigma}}) + \frac{1}{1+\nu}\nabla(\nabla\,Tr(\bar{\bar{\sigma}})) + \frac{\nu}{1-\nu}div\vec{f}\,\bar{\bar{I}} + \nabla\vec{f} + \nabla^T\vec{f} = \bar{\bar{0}} \tag{4.10}$$

Soit, si le champ de force est uniforme, on obtient les **équations de Beltrami.**

$$(1+\nu)div(\nabla\bar{\bar{\sigma}}) + \nabla(\nabla\,Tr(\bar{\bar{\sigma}})) = \bar{\bar{0}} \tag{4.11}$$

3.4 Théorème de superposition

Si $(\vec{U},\vec{f},\vec{F})$ et $(\vec{V},\vec{g},\vec{G})$ sont deux jeux de données engendrant respectivement des solutions $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ est solution du problème de données $(\alpha\vec{U}+\beta\vec{V},\, \alpha\vec{f}+\beta\vec{g},\, \alpha\vec{F}+\beta\vec{G})$ (Le problème est évidemment linéaire).

3.5 Elasticité plane

3.5.1 Contraintes planes

Dans le cas où le chargement est dans le plan 12, la structure mince dans la direction 3, on peut faire l'hypothèse que le problème est plan et libre de contraintes dans la direction 3.

Dans ce cas

$$\overset{=}{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2) & \sigma_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \sigma_{21}(x_1,x_2) & \sigma_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et d'après la loi de comportement

$$\overset{=}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1,x_2) & \varepsilon_{11}(x_1,x_2) & 0 \\ \varepsilon_{21}(x_1,x_2) & \varepsilon_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}(x_1,x_2) \end{bmatrix}$$

On remarquera que la déformation suivant 3 est non nulle.

3.5.2 Déformations planes

Dans le cas où le chargement est dans le plan 12, la structure très élancée dans la direction 3, sans possibilités de déplacement suivant 3, on peut faire l'hypothèse que le problème est plan sous l'hypothèse des déformations planes.

Dans ce cas

$$\overset{=}{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(x_1,x_2) & \varepsilon_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \varepsilon_{21}(x_1,x_2) & \varepsilon_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et d'après la loi de comportement

$$\overset{=}{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2) & \sigma_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \sigma_{21}(x_1,x_2) & \sigma_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33}(x_1,x_2) \end{bmatrix}$$

On remarquera que la contrainte suivant 3 est non nulle.

D'après (4.3)

$$\varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{33} - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right) = 0$$

donc

$$\sigma_{33} = \nu\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)$$

Nous allons prouver que les contraintes peuvent être déterminées par une seule fonction scalaire.

En appliquant l'équation d'équilibre (3.11) on a :

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \exists \phi(x_1, x_2) \quad / \ \sigma_{11} = \phi_{,2} \quad et \quad \sigma_{12} = -\phi_{,1} \\ \exists \psi(x_1, x_2) \quad / \ \sigma_{21} = \psi_{,2} \quad et \quad \sigma_{22} = -\psi_{,1} \end{cases}$$

comme le tenseur des contraintes est symétrique, on a $\psi_{,2} + \phi_{,1} = 0$, donc

$$\exists \chi(x_1, x_2) \quad / \ \phi = \chi_{,2} \quad et \quad \psi = -\chi_{,1}$$

en définitive on a prouvé

$$\exists \chi(x_1, x_2) \quad / \begin{cases} \sigma_{11} = \chi_{,22} \\ \sigma_{22} = \chi_{,11} \\ \sigma_{12} = -\chi_{,12} \end{cases}$$

χ est appelée la fonction d'**Airy**.

Le tenseur des contraintes devant vérifier l'équation de Beltrami (4.11), on a

$$(1+\nu)\sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} = 0$$

d'où

$$\Delta\Delta\chi = 0$$

χ est donc une fonction biharmonique.

3.6 Thermoélasticité

3.6.1 Thermodynamique : équations de bilan

Jusqu'à présent nous avons utilisé les équations de bilan suivantes:

Conservation de la masse

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \ div\vec{v} = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$div \, \overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} = \rho\vec{\gamma} \qquad dans \ \Omega$$

Conservation du moment cinétique (3.17)

Nous introduisons maintenant l'équation de bilan de conservation d'énergie, ou encore le premier principe de la thermodynamique:

$$\frac{d}{dt}\left(E + K\right) = P_{ext} + Q$$

où

E représente l'énergie interne $E = \int_\Omega \rho e \ d\Omega$ (e densité d' énergie interne)

K représente l'énergie cinétique $K = \int_\Omega \frac{1}{2}\rho\vec{v}\cdot\vec{v} \ d\Omega$ ($\vec{v}$ la vitesse)

P_{ext} représente la puissance des efforts extérieurs $P_{ext} = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{v} \, d\Omega$

Q représente le taux de chaleur reçu $Q = \int_{\Omega} r \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Omega$ (q vecteur de chaleur et r source de chaleur)

Par application du premier principe, en utilisant (5.7) on a:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{de}{dt} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho \vec{v} \cdot \vec{\gamma} \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} r \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Omega$$

en utilisant la conservation de la quantité de mouvement (3.9)

$$\int_{\Omega} \rho \frac{de}{dt} \, d\Omega = \int_{\Omega} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}} \, d\Omega + \int_{\Omega} r \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Omega$$

Soit, par application du théorème de la divergence, la forme locale du premier principe

$$\rho \dot{e} = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}} + r - div \vec{q} \tag{4.12}$$

Nous présentons également, sans plus de discussion le **second principe de la thermodynamique**:

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\Omega} \frac{r}{T} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} \, d\Omega$$

où T est la température et S l'entropie. Ce second principe s'écrit sous sa forme locale

$$\rho \dot{s} + div \frac{\vec{q}}{T} - \frac{r}{T} \geq 0 \tag{4.13}$$

où s représente l'entropie massique

3.6.2 *Equation de la chaleur*

On peut exprimer l'énergie interne massique e en fonction de l'entropie massique s, de la température T et l'énergie libre ψ.

$$e = \psi + Ts \tag{4.14}$$

En thermoélasticité, sous l'hypothèse des petites perturbations, pour un écart de température par rapport à la température au repos $T - T_0$ petit, on a:

$$\psi = \psi(\overline{\overline{\varepsilon}}, T)$$

Grace au second principe on peut montrer que

$$\overline{\overline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}} \quad et \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}$$

donc, le premier principe peut s'écrire

$$\rho \dot{e} = \rho \dot{\psi} + \rho \dot{T} s + \rho T \dot{s}$$

et comme

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} = \frac{\overline{\overline{\sigma}}}{\rho} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} - s \dot{T}$$

on a

$$\overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} - \rho s \dot{T} + \rho \dot{s} T + \rho s \dot{T} = \overline{\overline{\sigma}} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} + r - div \vec{q}$$

or

$$\dot{s} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial T}\right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}} \partial T} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\overline{\sigma}}}{\partial T} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T}$$

c'est à dire que le premier principe s'écrit

$$-T \frac{\partial \overline{\overline{\sigma}}}{\partial T} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} + \rho T \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} = r - div \vec{q}$$

En introduisant la chaleur spécifique $C = T \dfrac{\partial s}{\partial T}$

$$-T \frac{\partial \overline{\overline{\sigma}}}{\partial T} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} + \rho C \dot{T} = r - div \vec{q}$$

puis la loi de Fourier $\vec{q} = -\overline{\overline{k}} \nabla T$, où $\overline{\overline{k}}$ représente la conductivité thermique,

$$-T \frac{\partial \overline{\overline{\sigma}}}{\partial T} : \dot{\overline{\overline{\varepsilon}}} + \rho C \dot{T} = r + div \overline{\overline{k}} \nabla T$$

En général la contribution mécanique est négligeable par rapport aux autres contributions, si bien que l'équation de bilan de l'énergie conduit à l'équation de la chaleur :

$$\rho C \dot{T} = \rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) = r + div \overline{\overline{k}} \nabla T \tag{4.15}$$

Dans le cas où le problème à traiter est stationnaire, sans source de chaleur, avec une conductivité constante, on retrouve l'équation habituelle :

$$\Delta T = 0$$

3.6.3 Loi de comportement thermo-élastique

Dans le cadre de la thermoélasticité , l'énergie libre spécifique s'écrit comme un développement limité au second ordre en déformation et température, ou plutôt en déformation et écart de température $\tau = T - T_0$ (supposés " petits ") :

$$\rho \psi(\overline{\overline{\varepsilon}}, T) = \frac{1}{2} \overline{\overline{\varepsilon}} : \overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}} - \rho s \tau - \frac{1}{2} \rho b \tau - \overline{\overline{\beta}} : \overline{\overline{\varepsilon}} \tau$$

Par définition

$$\overline{\overline{\sigma}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \overline{\overline{\varepsilon}}} (\overline{\overline{\varepsilon}}, T) = \overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \overline{\overline{\varepsilon}} - \overline{\overline{\beta}} \tau = \overline{\overline{\overline{\overline{C}}}} : \left(\overline{\overline{\varepsilon}} - \overline{\overline{\alpha}} \tau \right)$$

où $\overline{\overline{\alpha}}$ représente le tenseur des dilatations thermiques

Dans le cas isotrope la loi de comportement thermo-élastique s'écrit :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \lambda Tr(\overline{\overline{\varepsilon}}) \overline{\overline{1}} + 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} - (3\lambda + 2\mu) \overline{\overline{\alpha}} \tau$$

4 A retenir

Loi de comportement élastique linéaire isotrope

$$\overline{\overline{\sigma}} = \lambda\, Tr(\overline{\overline{\varepsilon}})\, \overline{\overline{1}} + 2\,\mu\, \overline{\overline{\varepsilon}}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = -\frac{\nu}{E}\, Tr(\overline{\overline{\sigma}})\, \overline{\overline{1}} + \frac{1+\nu}{E}\, \overline{\overline{\sigma}}$$

Critère de Tresca

$$Sup\left\{\left|\sigma_I - \sigma_{II}\right|, \left|\sigma_I - \sigma_{III}\right|, \left|\sigma_{II} - \sigma_{III}\right|\right\} \leq 2\sigma_0$$

Le problème d'élasticité

$$\begin{cases} \overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}\right) \\ \vec{u} = \vec{U}_0(X) \quad sur\ \partial\Omega_U \\ div\, \overline{\overline{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0} \qquad dans\ \Omega \\ \overline{\overline{\sigma}}\, \vec{n} = \begin{cases} \vec{F} & sur\ \partial\Omega_F \\ \vec{R} & sur\ \partial\Omega_U \end{cases} \\ \overline{\overline{\sigma}} = \lambda Tr(\overline{\overline{\varepsilon}}) \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{\varepsilon}} \end{cases}$$

Equation de Navier

$$(\lambda + \mu)\nabla(div\, \vec{u}) + \mu div(\nabla \vec{u}) + \vec{f} = \vec{0}$$

En élasticité plane sous l'hypothèse des deformations planes :

$$\sigma_{33} = \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) \text{ et } \varepsilon_{33} = 0$$

Conservation de l'énergie

$$\frac{d}{dt}\left(E + K\right) = P_{ext} + Q$$

Forme locale de la conservation de l'énergie

$$\rho \dot{e} = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}} + r - div\vec{q}$$

Equation de la chaleur

$$\rho C\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T\right) = r + div\overline{\overline{k}}\nabla T$$

Loi de comportement thermoélastique isotrope

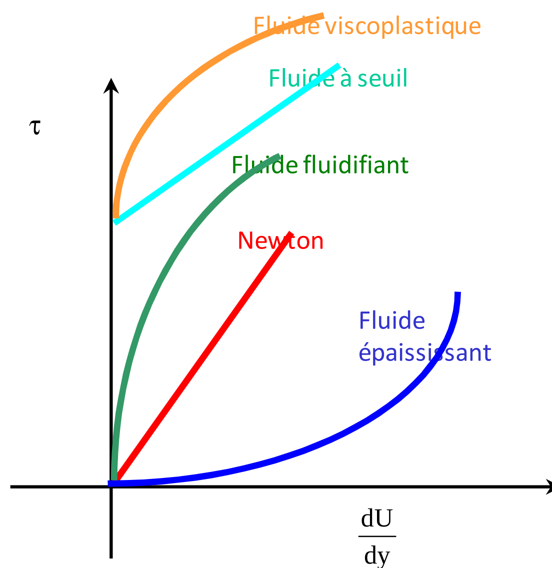
$$\overline{\overline{\sigma}} = \lambda Tr(\overline{\overline{\varepsilon}})\overline{\overline{1}} + 2\mu\overline{\overline{\varepsilon}} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\overline{\overline{\tau}}$$

INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES FLUIDES

1 Loi de comportement

En mécanique des fluides, nous travaillerons toujours en variables d'Euler

Comme pour les matériaux solides (qui sont des fluides qui s'ignorent ..) les lois de comportement fluide sont élaborées à partir de l'expérience.



1.1 Fluide Newtonien

Pour un fluide Newtonien, les contraintes sont une fonction affine des vitesses de déformation. Soit,

$$\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\bar{I}} + \lambda Tr(\bar{\bar{D}})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{D}} \tag{5.1}$$

où

$$\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{grad}\,\vec{v} + \overrightarrow{grad}^T\vec{v}\right) \tag{5.2}$$

soit, en notation indicielle

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

μ est la viscosité dynamique (dimension Poiseuille $\equiv \frac{M}{LT}$)

λ est le second coefficient de viscosité

On introduit également la viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (dimension Stokes $\equiv \frac{L^2}{T}$)

1.2 Fluide incompressible

Si le fluide est incompressible, alors on a vu que $div\vec{v} = \vec{0} \quad ou \quad Tr\overline{\overline{D}} = 0$

Donc, (5.1) devient

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}} \tag{5.3}$$

1.3 Fluide non-visqueux

Si le fluide est parfait, alors on a ne tient pas compte de la viscosité, donc (5.1) devient

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} \tag{5.4}$$

Le tenseur des contraintes est alors sphérique.

En particulier, l'action d'un fluide non visqueux sur une paroi est normale à la paroi (d'après l'équation d'équilibre).

1.4 Fluide au repos

Si le fluide est au repos, alors $\vec{v} = \vec{0}$, donc (5.1) devient

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} \tag{5.5}$$

2 Conservation de la masse

La masse d'un système matériel qu'on suit dans son mouvement reste constante.

$$M = \iiint_{\Omega(t)} \rho(\vec{x},t)\, d\Omega \quad et \quad \frac{dM}{dt} = 0$$

où ρ est la masse volumique. On a alors (2.20)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\vec{v} = 0 \qquad ou \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho\vec{v}\right) = 0 \tag{5.6}$$

Si on considère une grandeur différentiable Ψ quelconque, on a alors pour un fluide incompressible

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega(t)} \psi\, dm = \iiint_{\Omega(t)} \frac{d\psi}{dt}\, dm \tag{5.7}$$

<u>Démonstration</u>:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega(t)} \psi\, dm &= \frac{d}{dt}\iiint_{\Omega(t)} \psi\, \rho d\Omega \\
&= \iiint_{\Omega(t)} \left(\frac{d\psi\rho}{dt} + \psi\rho div\,\vec{v}\right) d\Omega \\
&= \iiint_{\Omega(t)} \left(\rho\frac{d\psi}{dt} + \psi\frac{d\rho}{dt} + \psi\rho div\,\vec{v}\right) d\Omega \\
&= \iiint_{\Omega(t)} \left(\rho\frac{d\psi}{dt} + \psi\left[\frac{d\rho}{dt} + \rho div\,\vec{v}\right]\right) d\Omega \\
&= \iiint_{\Omega(t)} \left(\rho\frac{d\psi}{dt}\right) d\Omega \\
&= \iiint_{\Omega(t)} \frac{d\psi}{dt}\, dm
\end{aligned}$$

Soit Σ un domaine géométrique **<u>fixe</u>** traversé par le fluide,

$$\iint_{\partial\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\partial\Sigma = \iiint_{\Sigma} div(\rho \vec{v}) \, d\Sigma \qquad (d'aprés\ le\ théorème\ de\ la\ divergence)$$
$$= \iiint_{\Sigma} -\frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\Sigma \qquad (d'après\ la\ conservation\ de\ la\ masse)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Sigma} \rho \, d\Sigma \qquad (car\ \Sigma\ est\ fixé)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Sigma} dm$$

Si le fluide est incompressible, alors la masse volumique est constante et

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Si on note q_m le débit massique à travers une surface S et q_v le débit volumique, alors

$$q_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\partial\Sigma = \rho \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\partial\Sigma = \rho q_v$$

Donc, en définitive:

Pour un domaine Σ fixe traversé par un fluide incompressible $\iint_{\partial\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\partial\Sigma = 0$: le débit volumique à travers la frontière $\partial\Sigma$ est nul.

3 Equation du mouvement

D'après l'équation du mouvement(3.10),

$$\vec{f} + div\overline{\overline{\sigma}} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

D'où, pour un fluide newtonien

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + div\left(-p\overline{\overline{I}} + \lambda Tr(\overline{\overline{D}})\overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{D}}\right)$$
$$= \vec{f} - div\left(p\overline{\overline{I}}\right) + \lambda div\left(Tr(\overline{\overline{D}})\overline{\overline{I}}\right) + 2\mu div\left(\overline{\overline{D}}\right)$$
$$= \vec{f} - \nabla p + \lambda \nabla\left(div\vec{v}\right) + \mu div\left(\nabla\vec{v} + \nabla^T \vec{v}\right)$$

Soit l'équation de Navier-Stokes compressible

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \nabla p + (\lambda + \mu)\nabla\left(div\vec{v}\right) + \mu \Delta \vec{v} \tag{5.8}$$

* Pour un fluide **<u>incompressible</u>**, $div\vec{v} = \vec{0}$, donc (5.8) devient:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\right) = \vec{f} - \nabla p + \mu \Delta \vec{v} \tag{5.9}$$

* Pour un fluide **<u>non visqueux</u>**, (5.8) devient:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\right) = \vec{f} - \nabla p \tag{5.10}$$

4 A retenir

Loi de comportement pour un fluide newtonien

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \lambda Tr(\overline{\overline{D}})\overline{\overline{I}} + 2\mu\overline{\overline{D}}$$

Conservation de la masse pour un fluide incompressible

$$div\vec{v} = \vec{0}$$

Grace à la conservation de la masse pour un fluide incompressible

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega(t)} \psi \; dm = \iiint_{\Omega(t)} \frac{d\psi}{dt} \; dm$$

Equation de Navier Stokes compressible

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \nabla p + (\lambda+\mu)\nabla\left(div\vec{v}\right) + \mu\Delta\vec{v}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Mécanique des Milieux Continus*, Cours ESIM 1984, Equipe IMST Marseille.

[2] G. Duvaut, *Mécanique des Milieux Continus*, ed. Masson 1990.

[3] P. Germain - P. Muller, *Introduction à la Mécanique des Milieux Continus*, ed. Masson 1995.

[4] J. Salençon, *Mécanique des Milieux Continus*, ed. ellipse 1988.

[5] P. Germain, *Mécanique*, ed. ellipse, ecole polytechnique, tomes I et II.

[6] G. Dhatt, J.L. Batoz, *Modélisation des structures par éléments finis: Solides élastiques*, ed. Hermes, tome I.

[7] A. Bazergui, T. Bui-Quoc,A. Biron, G. McIntyre, C. Laberge, *Résistance des matériaux*, ed. de l'école polytechnique de Montréal 1993.

[8] J. Coirier, *Mécanique des Milieux Continus*, ed. Dunos 1997.

[9] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, *Mécanique des matériaux solides*, ed. Dunos 1996.

[10] O. Débordes, *Thermodynamique des milieux continus*, ESM2, Cours du DEA de Mécanique 2001.

ANNEXES: RAPPELS DE MECANIQUES DES SOLIDES RIGIDES

1 Cinématiques du solide

Avertissement: L'objectif de ce chapitre, est de familiariser les étudiants avec les notations tensorielles. Afin d'en simplifier le contenu, nous ne considérerons que des bases orthonormées.

1.1 Description du mouvement

Soit S un ensemble de particules tel que la distances entre deux particules quelconques reste pratiquement constante au cours du mouvement. On étudie l'ensemble S en le considérant indéformable: solide rigide.

1.1.1 Système de référence

Dans un espace euclidien ξ à trois dimensions, soit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ une base orthonormée. On définit un référentiel d'observation par cet espace euclidien et le temps: $\Re\left(\xi, t\right)$. On définit la dérivée d'un vecteur $\vec{U}$ par rapport au temps dans ce référentiel par:

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{\Re} = \frac{dU_i}{dt}\vec{e}_i$$

1.1.2 Mouvement d'un solide

Soit S un solide rigide en mouvement par rapport à $\Re$. Soit $\xi_S\left(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ un espace euclidien lié à S.

Considérons un vecteur lié à S, dont les composantes sont représentées par $\vec{X}$ dans ξ et $\vec{X}_S$ dans ξ_S.

On note Q l'opérateur linéaire définissant le passage de ξ à ξ_S.

$$\vec{X}_S = Q\vec{X} \quad \text{et} \quad \vec{X} = Q^T\vec{X}_S$$

Comme $\vec{X}_S$ est indépendant du temps puisque lié à S, on a:

$$\left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{dQ^T}{dt}\right|_{\Re}\vec{X}_S = \left.\frac{dQ^T}{dt}\right|_{\Re}Q\vec{X} = L\vec{X}$$

or

$$Q^TQ = I$$

C'est à dire

$$\frac{dQ^T}{dt}Q + Q^T\frac{dQ}{dt} = \overline{\overline{0}}$$

$$L + L^T = \overline{\overline{0}}$$

L est un opérateur linéaire antisymétrique, on peut donc définir un vecteur $\vec{\Omega}$ (d'après (1.10)) tel que:

$$\left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_{\Re} = L\vec{X} = \vec{\Omega}\wedge\vec{X} \tag{6.1}$$

avec

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} L_{ji} \vec{e}_k$$

1.1.3 Torseur cinématique

Soient A et P deux particules du solide S.

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

donc par dérivation

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{\Re} + \left.\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right|_{\Re} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

soit

$$\vec{V}(P) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP} \tag{6.2}$$

On définit le ***torseur cinématique*** par le vecteur vitesse de A par rapport à $\Re$, $\vec{V}(A)$ et le vecteur de rotation instantanée $\vec{\Omega}$: $\left.\boldsymbol{\mathcal{V}}\right|_{\Re} = \begin{Bmatrix} \vec{V}(A) \\ \vec{\Omega} \end{Bmatrix}$

1.1.4 Accélération

$$\vec{V}(P) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\left.\frac{d\vec{V}(P)}{dt}\right|_{\Re} = \left.\frac{d\vec{V}(A)}{dt}\right|_{\Re} + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{\Re} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\Omega} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right|_{\Re}$$

Soit

$$\vec{\gamma}(P) = \vec{\gamma}(A) + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{\Re} \wedge \overrightarrow{AP} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AP}\right) = \vec{\gamma}(A) + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{\Re} \wedge \overrightarrow{AP} + \left(\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{AP}\right)\vec{\Omega} - \Omega^2 \overrightarrow{AP} \tag{6.3}$$

1.2 Composition des mouvements

L'espace temps est commun à tous les référentiels d'observation. on considère deux référentiels $\Re^a\left(\xi^a, t\right)$ et $\Re^b\left(\xi\ , t\right)$.

1.2.1 Dérivation composée

Soit $\vec{U}$ un vecteur dans la base $\xi^a\left(O, \vec{e}_1^{\,a}, \vec{e}_2^{\,a}, \vec{e}_3^{\,a}\right)$, $\vec{U} = U_i \vec{e}_i^{\,a}$ par dérivation:

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{\Re^a} = \frac{dU_i}{dt}\vec{e}_i^{\,a}$$

Soit $\vec{U}$ un vecteur dans la base $\xi^b\left(O, \vec{e}_1^{\,b}, \vec{e}_2^{\,b}, \vec{e}_3^{\,b}\right)$, $\vec{U} = U_i \vec{e}_i^{\,b}$ par dérivation:

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{\Re^a} = \frac{dU_i}{dt}\vec{e}_i^{\,b} + U_i \frac{d\vec{e}_i^{\,b}}{dt}$$

Car ξ^b est en mouvement par rapport à ξ^a , et d'après (6.1)

$$\frac{d\vec{e}_i^b}{dt} = \vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b} \wedge \vec{e}_i^b$$

d'où, avec $\vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b}$ représentant le vecteur rotation de ξ^b par rapport à ξ^a :

$$\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{\Re^a} = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right|_{\Re^b} + \vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b} \wedge \vec{U} \tag{6.4}$$

1.2.2 Composition des vitesses

Soit $P \in S$:

$$\overrightarrow{O^aP} = \overrightarrow{O^aO^b} + \overrightarrow{O^bP}$$

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O^aP}}{dt}\right|_{\Re^a} = \left.\frac{d\overrightarrow{O^aO^b}}{dt}\right|_{\Re^a} + \left.\frac{d\overrightarrow{O^bP}}{dt}\right|_{\Re^a}$$

Et donc d'après (6.4)

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O^aP}}{dt}\right|_{\Re^a} = \left.\frac{d\overrightarrow{O^aO^b}}{dt}\right|_{\Re^a} + \left.\frac{d\overrightarrow{O^bP}}{dt}\right|_{\Re^b} + \vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b} \wedge \overrightarrow{O^bP}$$

soit

$$\underbrace{\vec{V}_a(P)}_{Vitesse\ /\Re^a} = \underbrace{\vec{V}_b(P)}_{Vitesse\ /\Re^b} + \underbrace{\vec{V}_e(P)}_{Vitesse\ d'entrainement} \tag{6.5}$$

1.2.3 Composition des accélérations

On dérive (6.5) par rapport à $\Re^a$:

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{O^aP}}{dt^2}\right|_{\Re^a} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O^aO^b}}{dt^2}\right|_{\Re^a} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O^bP}}{dt^2}\right|_{\Re^b} + \vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O^bP}}{dt}\right|_{\Re^b} + \left.\frac{d\vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b}}{dt}\right|_{\Re^a} \wedge \overrightarrow{O^bP} + \vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O^bP}}{dt}\right|_{\Re^a}$$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_a(P) = \ & \vec{\gamma}_a(O^b) + \vec{\gamma}_b(P) + \vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b} \wedge \vec{V}_b(P) + \\ & \left(\left.\frac{d\vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b}}{dt}\right|_{\Re^b} + \vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b} \wedge \vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b}\right) \wedge \overrightarrow{O^bP} + +\vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b} \wedge \left(\left.\frac{d\overrightarrow{O^bP}}{dt}\right|_{\Re^b} + \vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b} \wedge \overrightarrow{O^bP}\right)\end{aligned}$$

$$\vec{\gamma}_a(P) = \vec{\gamma}_b(P) + \underbrace{\vec{\gamma}_a(O^b) + \left.\frac{d\vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b}}{dt}\right|_{\Re^b} \wedge \overrightarrow{O^bP} + \vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b} \wedge \left(\vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b} \wedge \overrightarrow{O^bP}\right)}_{Accélération\ d'entrainement} + \underbrace{2\vec{\Omega}_{\xi^q/\xi^b} \wedge \vec{V}_b(P)}_{Accélération\ de\ Coriolis}$$

$$\vec{\gamma}_a(P) = \vec{\gamma}_b(P) + \vec{\gamma}_e(P) + \vec{\gamma}_c(P) \tag{6.6}$$

2 Cinétique

La cinématique ne s'intéresse au mouvement des corps que du point de vue de l'espace et du temps: durée, vitesse, distance, etc …; tandis qu'en cinétique on introduit, en plus, le concept de masse, c'est à dire qu'on tient compte aussi de la masse

2.1 Définitions

On définit la masse d'un solide S par :

$$m = \iiint_S dm(P) = \iiint_S \rho(P,t)dv \tag{6.7}$$

Où ρ représente la densité volumique de masse.

On définit G le centre de masse (ou d'inertie) du solide S par :

$$\forall\ O \in \xi \quad \iiint_S \overrightarrow{OP}dm(P) = m\overrightarrow{OG} \tag{6.8}$$

2.2 Eléments de cinétique

2.2.1 Torseur cinétique

On définit le *Torseur Cinétique* ou *Torseur des quantités de mouvement* par :

$$\kappa\Big|_{\Re} = \begin{cases} \vec{R} = \iiint_S \vec{V}(P)dm(P) & \text{Résultante cinétique de S } /\Re \\ \vec{k}_A = \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P)dm(P) & \text{Moment cinétique en A } /\Re \end{cases} \tag{6.9}$$

On peut remarquer que si le repère $\Re$ est fixe, alors :

$$\vec{R} = \frac{d}{dt}\iiint_S \overrightarrow{OP}(P)dm(P) = m\vec{V}(G)$$

2.2.2 Torseur dynamique

On définit le *Torseur dynamique* par :

$$\mathcal{A}\Big|_{\Re} = \begin{cases} \vec{d} = \iiint_S \vec{\gamma}(P)dm(P) & \text{Résultante dynamique de S } /\Re \\ \vec{\delta}_A = \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P)dm(P) & \text{Moment dynamique en A } /\Re \end{cases} \tag{6.10}$$

2.2.3 Relation entre torseur cinématique et torseur dynamique

En dérivant par rapport au temps dans $\Re$ on obtient :

$$\vec{d} = \frac{d\vec{R}}{dt} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{k}_A}{dt} &= \iiint_S \frac{d\overrightarrow{AP}}{dt} \wedge \vec{V}(P)dm(P) + \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P)dm(P) \\ &= \iiint_S \frac{d\overrightarrow{AO}}{dt} \wedge \vec{V}(P)dm(P) + \iiint_S \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \wedge \vec{V}(P)dm(P) + \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P)dm(P) \\ &= -\vec{V}(A) \wedge \iiint_S \vec{V}(P)dm(P) + \vec{\delta}_A \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}_A = \frac{d\vec{k}_A}{dt} + \vec{V}(A) \wedge m\vec{V}(G) \tag{6.12}$$

$$\vec{\delta}_A = \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(P)dm(P) = \iiint_S \overrightarrow{AG} \wedge \vec{\gamma}(P)dm(P) + \iiint_S \overrightarrow{GP} \wedge \vec{\gamma}(P)dm(P)$$
$$\vec{\delta}_A = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{d} + \vec{\delta}_G$$

$$\vec{\delta}_A = \frac{d\vec{k}_G}{dt} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{\gamma}(G) \qquad (6.13)$$

2.2.4 Energie cinétique

On définit l'énergie cinétique du solide S par :

$$T(S) = \frac{1}{2}\iiint_S \vec{V}^2(P)dm(P) \qquad (6.14)$$

2.2.5 Théorème de Koenig

Soit $\xi\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ un espace euclidien et $\xi_G\left(G,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$ un espace euclidien barycentrique lié au solide S.

$$\vec{k}_A = \vec{k}_G + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}(G) \qquad (6.15)$$

$$\vec{\delta}_A = \vec{\delta}_G + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{\gamma}(G) \qquad (6.16)$$

$$T(S) = \iiint_S \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \cdot \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} dm$$

$$T(S) = \frac{1}{2}\iiint_S \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \cdot \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} dm + \frac{1}{2}\iiint_S \frac{d\overrightarrow{GP}}{dt} \cdot \frac{d\overrightarrow{GP}}{dt} dm + \iiint_S \frac{d\overrightarrow{GP}}{dt} \cdot \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} dm$$

$$T(S) = T_{\Re_G}(S) + \frac{1}{2}mV^2(G) \qquad (6.17)$$

2.3 Cinétique du solide rigide

2.3.1 Opérateur d'inertie

On définit l'opérateur d'inertie par $\mathcal{J}_A$ tel que :

$$\mathcal{J}_A : \quad \vec{u} \in \xi \rightarrow \mathcal{J}_A(\vec{u}) = \iiint \overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right) dm$$

Si $\overrightarrow{AP} = x_i\vec{e}_i$ alors

$$\overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right) = \varepsilon_{ijk} x_j \varepsilon_{kpq} u_p x_q \vec{e}_i = \delta_{pi}\delta_{qj} x_j u_p x_q \vec{e}_i - \delta_{qi}\delta_{pj} x_j u_p x_q \vec{e}_i = x_j u_i x_j \vec{e}_i - x_j u_j x_i \vec{e}_i$$

$$\overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right) = \left(x_j^2 \vec{e}_k \otimes \vec{e}_k\right) \cdot \left(u_i \vec{e}_i\right) - \left(x_k x_i \vec{e}_k \otimes \vec{e}_i\right) \cdot \left(u_j \vec{e}_j\right) = \left(x_j^2 \vec{e}_k \otimes \vec{e}_k - x_k x_j \vec{e}_k \otimes \vec{e}_j\right) \cdot \left(u_i \vec{e}_i\right)$$

Et l'opérateur d'inertie est représenté par la matrice :

$$I_A = \begin{bmatrix} I_1 & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{12} & I_2 & -I_{23} \\ -I_{13} & -I_{23} & I_3 \end{bmatrix}$$

Où

$$I_1 = \iiint \left(x_2^2 + x_3^2\right) dm \quad I_{12} = \iiint x_1 x_2 dm$$
$$I_2 = \iiint \left(x_1^2 + x_3^2\right) dm \quad I_{13} = \iiint x_1 x_3 dm$$
$$I_3 = \iiint \left(x_1^2 + x_2^2\right) dm \quad I_{23} = \iiint x_2 x_3 dm$$

2.3.2 Influence des symétries matérielles

- Si le solide S possède un plan de symétrie $\left(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$, alors

$$\iiint x_1 x_3 dm = \iiint_{x_3 \geq 0} x_1 x_3 dm + \iiint_{x_3 < 0} x_1 x_3 dm = \iiint_{x_3 \geq 0} x_1 x_3 dm - \iiint_{x_3 \geq 0} x_1 x_3 dm = 0$$

Soit

$$I_A = \begin{bmatrix} I_1 & -I_{12} & 0 \\ -I_{12} & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

- Si le solide S possède un axe de symétrie $\left(A, \vec{e}_3\right)$, alors

$$\iiint_{\Omega} \cdots \rho dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\Omega} \cdots \rho r dr d\theta dx_3$$

Et comme

$$\iiint_{\Omega} x_1 x_3 \rho dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\Omega} r \cos\theta x_3 \rho r dr d\theta dx_3 = 0$$

$$\iiint_{\Omega} x_1 x_2 \rho dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\Omega} r^2 \sin\theta \cos\theta x_3 \rho r dr d\theta dx_3 = 0$$

on a finalement

$$I_A = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

- Moment d'inertie par rapport à une droite Δ (de vecteur unitaire $\vec{\delta}$) passant par A

Soit H le projeté orthogonal d'un point P du solide S, on a alors :

$$I_\Delta = \iiint_S \left\|\overrightarrow{PH}\right\|^2 dm = \iiint_S \left(\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AH}\right\|^2\right) dm = \iiint_S \left(\left\|\vec{\delta}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 - \left(\overrightarrow{AP}.\vec{\delta}\right)^2\right) dm$$

$$I_\Delta = \iiint_S \left(\left(\vec{\delta}.\vec{\delta}\right)\left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP}\right) - \left(\overrightarrow{AP}.\vec{\delta}\right)^2\right) dm = \iiint_S \vec{\delta}.\left(\vec{\delta}\left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP}\right) - \overrightarrow{AP}\left(\overrightarrow{AP}.\vec{\delta}\right)\right) dm$$

$$I_\Delta = \vec{\delta}.\iiint_S \left(\vec{\delta}\left(\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP}\right) - \overrightarrow{AP}\left(\overrightarrow{AP}.\vec{\delta}\right)\right) dm$$

Et comme $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$,

$$I_\Delta = \vec{\delta}.\iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{AP}\right) dm = \vec{\delta} \cdot \mathcal{J}_A(\vec{\delta}) = \vec{\delta} \cdot I_A \cdot \vec{\delta}$$

- Théorème de Huyggens généralisé

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_A(\vec{u}) &= \iiint \overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right) dm \\ &= \iiint \overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right) dm + \iiint \overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}\right) dm \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \iiint \overrightarrow{AP} dm\right) + \iiint \overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right) dm + \iiint \overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}\right) dm \\ &= \overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge m\overrightarrow{AG}\right) + \left(\iiint \overrightarrow{GP} dm\right) \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right) + \iiint \overrightarrow{GP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}\right) dm\end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{J}_A(\vec{u}) = \overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge m\overrightarrow{AG}\right) + \mathcal{J}_G(\vec{u})$$

- Théorème de Huyggens appliqué au moment d'inertie par rapport à une droite Δ (de vecteur unitaire $\vec{\delta}$) passant par A (tel que $\overrightarrow{AG} \perp \vec{\delta}$) et Δ' (de vecteur unitaire $\vec{\delta}$)passant par G.

$$I_\Delta = \vec{\delta} \cdot \mathcal{J}_A(\vec{\delta}) = \vec{\delta} I_A \vec{\delta} = \vec{\delta} \cdot \left(\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge m\overrightarrow{AG}\right) + \mathcal{J}_G(\vec{\delta})\right) = \vec{\delta} \cdot \left(m\overrightarrow{AG}^2 \vec{\delta} - m\left(\vec{\delta} \cdot \overrightarrow{AG}\right)\overrightarrow{AG} + I_G \vec{\delta}\right)$$

soit

$$I_\Delta = \vec{\delta} I_A \vec{\delta} = \vec{\delta} \cdot \left(m\overrightarrow{AG}^2 + I_G\right)\vec{\delta} = m\overrightarrow{AG}^2 + I_G$$

2.3.3 Moment cinétique du solide

$$\vec{k}_A = \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P) dm(P)$$

Soit Q un point quelconque du solide

$$\vec{k}_A = \iiint_S \overrightarrow{AP} \wedge \left(\vec{V}(Q) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{QP}\right) dm(P)$$

$$\vec{k}_A = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(Q) + \iiint_S \left(\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}\right) \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{QP}\right) dm(P)$$

$$\vec{k}_A = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(Q) + \overrightarrow{AQ} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \iiint_S \overrightarrow{QP} dm(P)\right) + \iiint_S \overrightarrow{QP} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{QP}\right) dm(P)$$

D'où

$$\vec{k}_A = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(Q) + m\overrightarrow{AQ} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{QG}\right) + \mathcal{J}_G(\vec{\Omega})$$

Dans le cas particulier où Q=G, on obtient :

$$\vec{k}_A = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G) + \mathcal{J}_G(\vec{\Omega})$$

C'est-à-dire

$$\vec{k}_G = \mathcal{J}_G(\vec{\Omega})$$

2.3.4 Energie cinétique du solide

$$T(S) = \frac{1}{2} \iiint_S \vec{V}^2(P) dm(P)$$

Soit Q un point quelconque du solide

$$T(S)=\frac{1}{2}\iiint_S\left(\vec{V}(Q)+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{QP}\right)^2 dm(P)$$

$$T(S)=\frac{1}{2}\iiint_S\left(\vec{V}(Q)\right)^2 dm(P)+\iiint_S\left(\vec{V}(Q)\cdot\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{QP}\right)dm(P)+\frac{1}{2}\iiint_S\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{QP}\right)^2 dm(P)$$

$$T(S)=\frac{m}{2}\vec{V}^2(Q)+m\vec{V}(Q)\cdot\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{QG}\right)+\frac{1}{2}\iiint_S\vec{\Omega}\cdot\left(\overrightarrow{QP}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{QP}\right)\right)dm(P)$$

Soit

$$T(S)=\frac{m}{2}\vec{V}^2(Q)+m\vec{V}(Q)\cdot\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{QG}\right)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot\mathcal{J}_Q(\vec{\Omega})$$

Dans le cas particulier où Q=G, on obtient :

$$T(S)=\frac{m}{2}\vec{V}^2(G)+\frac{1}{2}\vec{\Omega}\cdot\mathcal{J}_G(\vec{\Omega})$$

3 Equations fondamentales de la mécanique des solides

3.1 Torseur associé aux efforts externes

Soit $\vec{f}(P)$ une densité volumique de force exercée sur le solide S.

Soit $\vec{F}(P)$ une densité surfacique de force exercée sur la frontière du solide ∂S.

Soit $\vec{\mathfrak{F}}(P)$ une densité linéique de force exercée sur une courbe Γ.

Soit $\vec{F}_i$ une force ponctuelle exercée en un point P_i de S.

Le torseur des efforts extérieurs est défini par :

$$\vec{\mathfrak{F}}_e(S)=\begin{cases}\vec{R}=\iiint\limits_S\vec{f}(P)+\iint\limits_{\partial S}\vec{F}(P)+\int\limits_\Gamma\vec{\mathfrak{F}}(P)+\sum\limits_i\vec{F}_i\\ \vec{C}_A=\iiint\limits_S\overrightarrow{AP}\wedge\vec{f}(P)+\iint\limits_{\partial S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{F}(P)+\int\limits_\Gamma\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\mathfrak{F}}(P)+\sum\limits_i\overrightarrow{AP}\wedge\vec{F}_i\end{cases}$$

3.2 Loi fondamentale de la dynamique

Il existe au moins un référentiel Galiléen associé à une chronologie, tel que :

$$\forall S,\ \forall t\quad Torseur\ dynamique = Torseur\ des\ forces\ extérieures$$

Ou encore

$$\forall S,\ \forall t\quad \mathcal{A}\left(\vec{d},\vec{\delta}_A\right)=\vec{\mathfrak{F}}_e(\vec{R},\vec{C}_A)$$

En conséquence, on peut énoncer :

Théorème de la résultante dynamique : dans un référentiel galiléen

$$\vec{R}=m\vec{\gamma}(G)$$

Théorème du moment dynamique : dans un référentiel galiléen, soit A un point fixe

$$\vec{\delta}_A=\frac{d\vec{k}_A}{dt}=\vec{C}_A$$